Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II   Septiembre 2009

BLOQUE D

PROBLEMA D2. Dado el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} x \geq -2 \\ x+3y+5 \geq 0 \\ y-4x \geq -6 \\ 3y-x \leq 4 \\ y-x \leq 2 \end{cases}$$

a) Representa gráficamente el conjunto de soluciones del mismo y determina sus vértices.
b) Obtén los puntos donde la función *f(x, y) = 2 x – 3 y* alcanza los valores mínimo y máximo en dicha región.

Solución:

a) Cálculos para representar las restricciones

$x+3y+5 \geq 0$

(1) $x+3y+5=0$

x	y
0	$\frac{-5}{3}$
-5	0

¿(0,0) *cumple*?

$0+3.0+5 \geq 0$ *Sí*

$y-4x \geq -6$

(2) $y-4x=-6$

x	y
0	-6
$\frac{3}{2}$	0

¿(0,0) *cumple*?

$0-4.0 \geq -6$ *Sí*

$3y-x \leq 4$

(3) $3y-x=4$

x	y
0	$\frac{4}{3}$
-4	0

¿(0,0) *cumple*?

$3.0-0 \leq 4$ *Sí*

$y-x \leq 2$

(4) $y-x=2$

x	y
0	2
-2	0

¿(0,0) *cumple*?

$0-0 \leq 2$ *Sí*

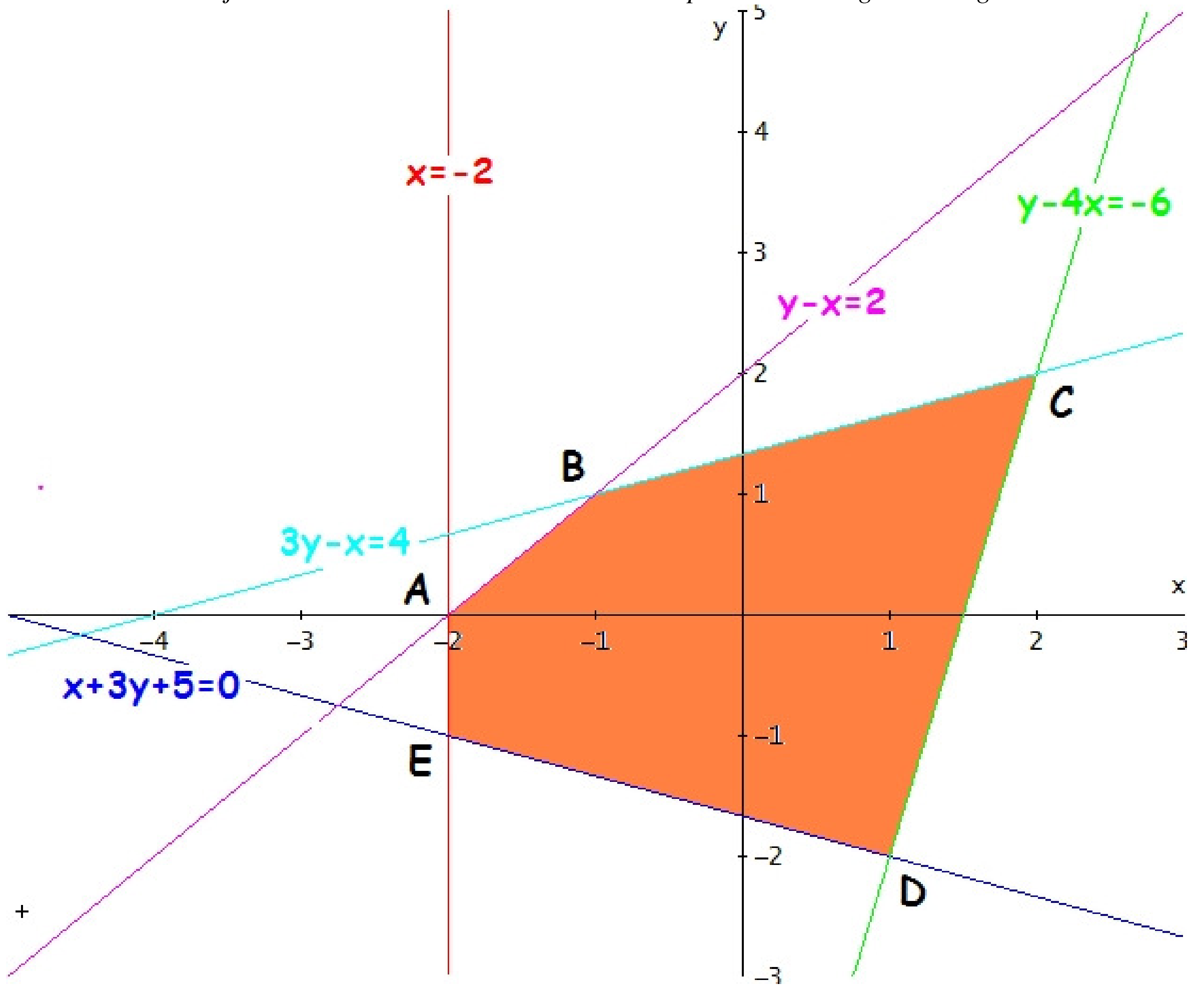
$x \geq -2$

(5) $x=-2$

¿(0,0) *cumple*?

$0 \geq -2$ *Sí*

Por lo tanto el conjunto de soluciones del sistema son los puntos de la siguiente región coloreada:



Los vértices de la región factible los obtendremos calculando los siguientes puntos de corte,

$A, \quad (4)\cap(5)$

$$\begin{matrix}(3)\\(2)\end{matrix}\begin{cases} y-x=-2 \\ x=-2 \end{cases}$$

sustituyendo en valor de x en 1^a *ecuación,*

$$y-(-2)=-2$$
$$y+2=2$$
$$y=0 \quad \rightarrow \quad A\left(-2\,,0\right)$$

$B, \quad (3)\cap(4)$

$$\begin{matrix}(3)\\(4)\end{matrix}\begin{cases} 3y-x=4 \\ y-x=2 \end{cases}$$

$$\begin{matrix}1^a.(-1)\\2^a\end{matrix}\begin{cases} -3y+x=-4 \\ y-x=2 \end{cases}$$

sumando,

$$-2y=-2$$
$$y=1$$

sustituyendo en 2^a,

$$1-x=2$$
$$-x=2-1$$
$$-x=1 \quad \rightarrow \quad x=-1 \quad \rightarrow \quad B\left(-1\,,1\right)$$

$C, \quad (2)\cap(3)$

$$\begin{matrix}(2)\\(3)\end{matrix}\begin{cases} y-4x=-6 \\ 3y-x=4 \end{cases}$$

$$\begin{matrix}1^a.(-3)\\2^a\end{matrix}\begin{cases} -3y+12x=18 \\ 3y-x=4 \end{cases}$$

sumando,

$$11x=22 \quad \rightarrow \quad x=\frac{22}{11}=2$$

sustituyendo en 1^a,

$$y-4\,.\,2=-6 \quad \rightarrow \quad y-8=-6 \quad \rightarrow \quad y=-6+8$$
$$y=2 \quad \rightarrow \quad C\left(2\,,2\right)$$

$D, \quad (1)\cap(2)$

$$\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}\begin{cases} x+3y+5=0 \\ y-4x=-6 \end{cases}$$

arreglamos el sistema $\begin{cases} x+3y=-5 \\ -4x+y=-6 \end{cases}$

$$\begin{matrix}1^a.4\\2^a\end{matrix}\begin{cases} 4x+12y=-20 \\ -4x+y=-6 \end{cases}$$

sumando,

$$13y=-26 \quad \rightarrow \quad y=\frac{-26}{13}=-2$$

sustituyendo en 2^a,

$$-2-4x=-6 \quad \rightarrow \quad -4x=-6+2 \quad \rightarrow \quad -4x=-4$$
$$x=\frac{-4}{-4}=1 \quad \rightarrow \quad D\left(1\,,-2\right)$$

$E, \quad (1)\cap(5)$

$$\begin{matrix}(3)\\(2)\end{matrix}\begin{cases} x+3y+5=0 \\ x=-2 \end{cases}$$

sustituyendo en valor de x en 1^a *ecuación,*

$$-2+3y+5=0$$
$$3y=2-5$$
$$3y=-3$$
$$y=\frac{-3}{3}=1 \quad \rightarrow \quad A\left(-2\,,-1\right)$$

Los vértices pedidos son los puntos

$$A(-2\,,0),\ B(-1\,,1),\ C(2\,,2),\ D(1\,,-2)\ y\ E(-2\,,-1)$$

c) Sabemos que la función f(x,y) alcanzará el mínimo y el máximo en los extremos de la región.

(x, y)	$f(x, y) = 2x - 3y$	
$(-2, 0)$	$2 \cdot (-2) - 3 \cdot 0 = -4$	
$(-1,1)$	$2 \cdot (-1) - 3 \cdot 1 = -2 - 3 = -5$	*mínimo*
$(2, 2)$	$2 \cdot 2 - 3 \cdot 2 = 4 - 6 = -2$	
$(1,-2)$	$2 \cdot 1 - 3 \cdot (-2) = 2 + 6 = 8$	*máximo*
$(-2,-1)$	$2 \cdot (-2) - 3 \cdot (-1) = -4 + 3 = -1$	

Luego f(x,y), en dicha región, alcanza su máximo en el punto (1 , – 2) {que es 8} y su mínimo en el punto (– 1 , 1) {que es – 5}.