OPCIÓN A

PROBLEMA 1. Un ganadero dispone de alimento concentrado y forraje para alimentar sus vacas. Cada kg. de alimento concentrado contiene 300 gr. de Proteína Cruda (PC), 100 gr. de Fibra Cruda (FC) y 2 Mcal. de Energía Neta de Lactancia (ENL) y su coste es 11 euros. Por su parte, cada kg. de forraje contiene 400gr. de PC, 300 gr. de FC y 1 Mcal. de ENL, siendo su coste de 6,50 euros. Determina la ración alimenticia de mínimo coste si sabemos que cada vaca debe ingerir al menos 3500 gr. de PC, 1500 gr. de FC y 15 Mcal. de ENL. ¿Cuál es su coste?

Solución:
Los datos del problema podemos resumirlos en la siguiente tabla,

	PC	*FC*	*ENL*	*Coste*
1 Kg de alimento concentrado	*300 gr*	*100 gr*	*2 Mcal*	*11 €*
1 Kg de forraje	*400 gr*	*300 gr*	*1 Mcal*	*6´50 €*

La ración alimenticia estará formada por
x = Kg de alimento concentrado
y = Kg de forraje

Las restricciones serán:
"cada vaca debe ingerir al menos 3500 gr de PC"; $300\,x + 400\,y \geq 3500 \;\rightarrow\; 3\,x + 4\,y \geq 35$
"cada vaca debe ingerir al menos 1500 gr de FC"; $100\,x + 300\,y \geq 1500 \;\rightarrow\; x + 3\,y \geq 15$
"cada vaca debe ingerir al menos 15 Mcal de ENL"; $2\,x + y \geq 15$
Como x e y representan Kg de alimentos, la restricción para los valores de estas variables es $x, y \geq 0$

El coste de la ración alimenticia será: $11\,x + 6{,}5\,y$

Para determinar la ración alimenticia de mínimo coste debemos resolver el siguiente problema:
Minimizar $z = 11\,x + 6{,}5\,y$

$$s.a.\;\begin{cases} 3x+4y \geq 35 \\ x+3y \geq 15 \\ 2x+y \geq 15 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

Efectuamos los cálculos necesarios para la representación gráfica de las inecuaciones.

$(a)\quad 3x+4y \geq 35$

$3x+4y=35$

$$\begin{array}{r|c} x & y \\ \hline 0 & 35/4 \\ 35/3 & 0 \end{array}$$

$¿(0,0)\ cumple?$

$3.0+4.0 \geq 35\ No$

$(b)\quad x+3y \geq 15$

$x+3y=15$

$$\begin{array}{r|l} x & y \\ \hline 0 & 5 \\ 15 & 0 \end{array}$$

$¿(0,0)\ cumple?$

$0+3.0 \geq 15\ No$

$(c)\quad 2x+y \geq 15$

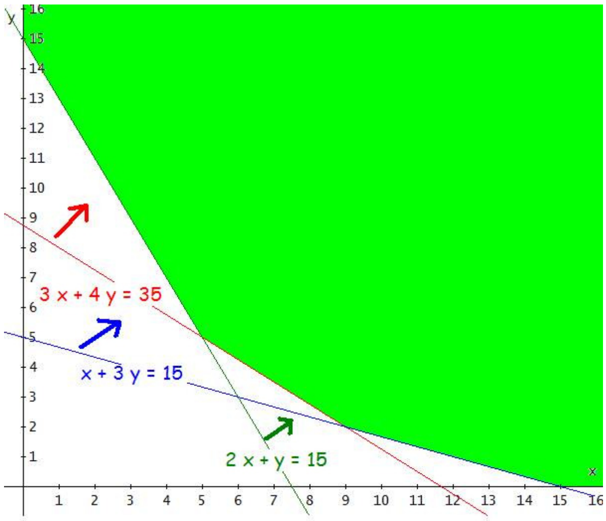
$2x+y=15$

$$\begin{array}{r|c} x & y \\ \hline 0 & 15 \\ 15/2 & 0 \end{array}$$

$¿(0,0)\ cumple?$

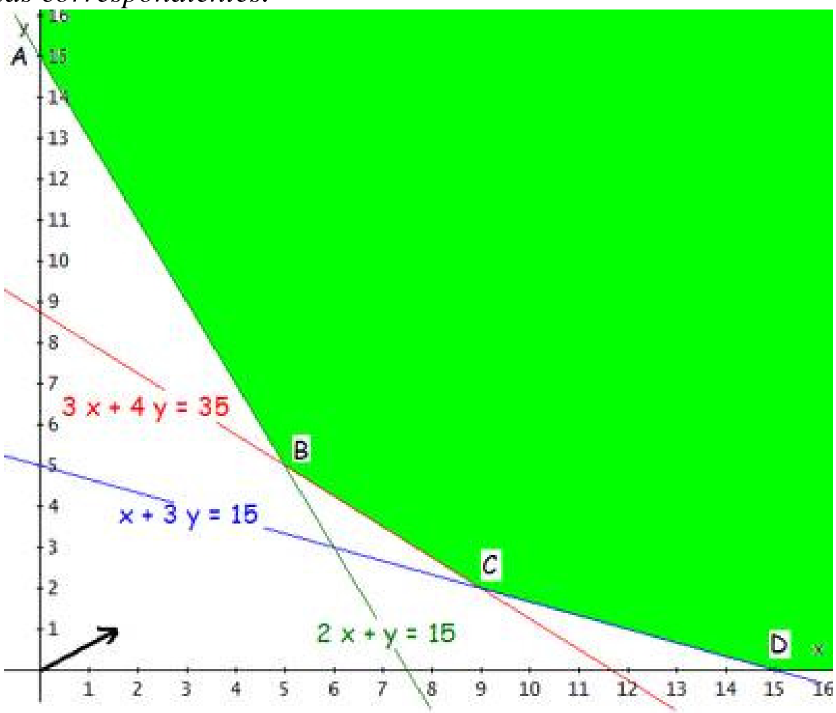
$2.0+0 \geq 15\ No$

La representación gráfica será:



La región factible está formada por los puntos de la zona sombreada.

Los vértices de la región determinada por las inecuaciones los obtendremos mediante los puntos de corte de las rectas correspondientes.



Es una región factible abierta.
Como el vector perpendicular a la función de coste es el representado a partir del origen, la función de coste no alcanza el máximo en esta región pero si su mínimo.

Son evidentes los vértices A (0 , 15) y D (15 , 0); calculemos los otros vértices.

B, (a) y (c):

$$\begin{cases} 3x + 4y = 35 \\ 2x + y = 15 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x + 4y = 35 \\ -8x - 4y = -60 \end{cases}$$

$$Sumando: \quad -5x \quad = -25 \quad \rightarrow \quad x = 5$$

Sustituyendo este valor de x en la 2ª ecuación, 2 . 5 + y = 15; y = 5

Punto de corte B (5 , 5)

C, (a) y (b):

$$\begin{cases} 3x + 4y = 35 \\ x + 3y = 15 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x + 4y = 35 \\ -3x - 9y = -45 \end{cases}$$

$$Sumando: \quad -5y \quad = -10 \quad \rightarrow \quad y = 2$$

Sustituyendo este valor de y en la 2ª ecuación, x + 3 . 2 = 15; x = 9

Punto de corte C (9 , 2)

Los vértices de la región factible son: (0, 15), (5 , 5), (9 , 2) y (15 , 0).

La función de coste, z, alcanza su valor mínimo en los vértices de la región anterior o en alguno de los segmentos que la delimitan.
Calculemos los valores de la función en los vértices,

x , y	z = 11 x + 6´5 y	
0 , 15	11 . 0 + 6´5 . 15 = 97´5	
5 , 5	11 . 5 + 6´5 . 5 = 87´5	Mínimo
9 , 2	11 . 9 + 6´5 . 2 = 112	
15 , 0	11 . 15 + 6´5 . 0 = 165	

Para que el coste sea mínimo la ración alimenticia debe estar formada por 5 Kg. de alimento concentrado y 5 Kg. de forraje.
El coste de esta ración alimenticia será de 87´50 euros.