OPCIÓN B

PROBLEMA 2. Sea la función:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x} & 1\le x\le 2\\[2ex] 1 & 2<x\le 3\\[2ex] -x^2+6x-8 & 3<x\le 4\\ 0 & 4<x\le 5\end{cases}$$

definida en el intervalo [1 , 5]. Se pide:

a) Estudia la continuidad en todos los puntos del intervalo [1 , 5].
b) Calcula el área de la región del plano limitada por el eje de abcisas, las rectas x = 2 y x = 4 y la gráfica de y = f(x).

Solución:
a) Continuidad en [1 , 5]

En [1 , 2), f(x) = 2/x que es continua ya que 2/x no se puede calcular únicamente para x = 0 y 0 no pertenece al intervalo [1 , 2).

En (2 , 3), f(x) = 1, función constante, luego continua.

En (3 , 4), f(x) = – x^2 + 6 x – 8, función polinómica, luego continua.

En (4 , 5], f(x) = 0, función constante, luego continua.

Estudiemos la continuidad en los cambios de definición.

En x = 2

$$f(2)=\frac{2}{2}=1$$

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{2}{x}=\dfrac{2}{2}=1\\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} 1=1\end{array}\right\}=1$$

$$f(2)=1=\lim_{x\to 2} f(x)$$

Por lo tanto f(x) es continua en x = 2

En x = 3

$$f(3)==1$$

$$\lim_{x\to 3} f(x)=\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-} 1=1\\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}\left(-x^2+6x-8\right)=-3^2+6\,.\,3-8=1\end{array}\right\}=1$$

$$f(3)=1=\lim_{x\to 3} f(x)$$

Por lo tanto f(x) es continua en x = 3

En $x = 4$

$$f(4) = -4^2 + 6\,.\,4 - 8 = 0$$

$$\lim_{x \to 4} f(x) = \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 4^-} \left(-x^2 + 6x - 8 \right) = -4^2 + 6\,.\,4 - 8 = 0 \\ \lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} 0 = 0 \end{array} \right\} = 0$$

$$f(4) = 1 = \lim_{x \to 4} f(x)$$

Por lo tanto $f(x)$ *es continua en* $x = 4$

En consecuencia, $f(x)$ *es continua en* $[\,1\,,\,5\,]$

b) Para calcular el área pedida debemos representar gráficamente la función en el intervalo $[\,2\,,\,4\,]$

En $[\,2\,,\,3\,]$, $f(x) = 1$, *recta horizontal.*

En $[\,3\,,\,4\,]$, $f(x) = -x^2 + 6x - 8$, *una parábola.*

Representemos la parábola completamente y utilicemos el trozo correspondiente

$y = -x^2 + 6x - 8$

$x = 0 \;\rightarrow\; y = -8 \;\rightarrow\;$ *Corte eje OY* $(\,0\,,\,-8\,)$

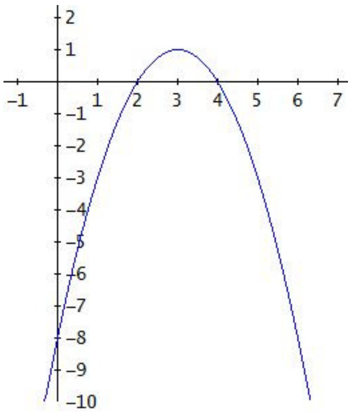
$$y = 0 \;\rightarrow\; -x^2 + 6x - 8 = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4(-1)(-8)}}{2(-1)} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 32}}{-2} = \frac{-6 \pm \sqrt{4}}{-2} =$$

$$= \frac{-6 \pm 2}{-2} = \left\langle \begin{array}{l} \dfrac{-6 + 2}{-2} = \dfrac{-4}{-2} = 2 \\ \dfrac{-6 - 2}{-2} = \dfrac{-8}{-2} = 4 \end{array} \right.$$

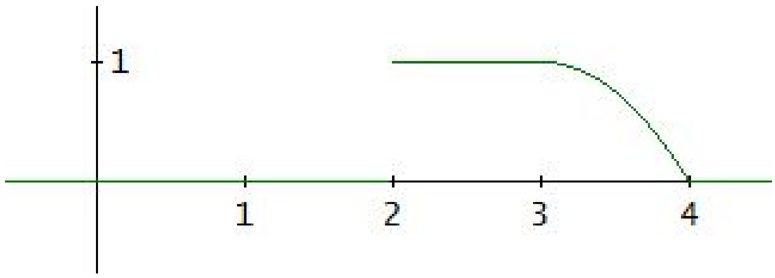
Corte eje OX $(\,2\,,\,0\,)$ *y* $(\,4\,,\,0\,)$

Vértice $x = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-6}{2(-1)} = \dfrac{-6}{-2} = 3 \;\rightarrow\; y = -3^2 + 6\,.\,3 - 8 = 1 \;\rightarrow\; (3\,,1)$

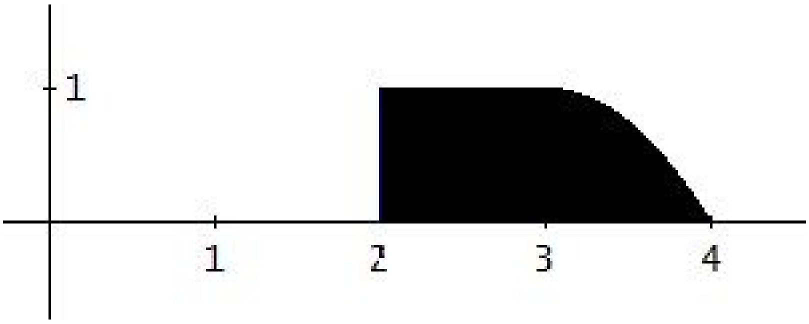
La representación de la parábola es:



Y la representación de $f(x)$ *en* $[\,2\,,\,4\,]$:



El área pedida será:



que la obtenemos a partir del siguiente cálculo integral:

$$A = \int_2^3 1\,dx + \int_3^4 \left(-x^2 + 6x - 8\right)dx = [x]_2^3 + \left[\frac{-x^3}{3} + \frac{6x^2}{2} - 8x\right]_3^4 =$$

$$= (3-2) + \left(\frac{-4^3}{3} + 3\,.\,4^2 - 8\,.\,4 - \left(\frac{-3^3}{3} + 3\,.\,3^2 - 8\,.\,3\right)\right) =$$

$$= 1 - \frac{64}{3} + 48 - 32 - (-9 + 27 - 24) = 17 - \frac{64}{3} - (-6) = 23 - \frac{64}{3} = \frac{69-64}{3} = \frac{5}{3}$$

El área mide $\frac{5}{3}$ *u.a.*