OPCIÓN A

PROBLEMA 2. Dada la función $f(x)=\dfrac{3x+2}{x^2-1}$, se pide:

a) Su dominio y puntos de corte con los ejes coordenados.
b) Ecuación de sus asíntotas verticales y horizontales.
c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
d) Máximo y mínimos locales.
e) Representación gráfica a partir de la información de los apartados anteriores.

Solución:

a) Dominio

$$x^2-1=0 \quad\rightarrow\quad x^2=1 \quad\rightarrow\quad x=\pm\sqrt{1} \quad\rightarrow\quad x=\pm 1 \quad\rightarrow\quad Dom\ f(x)=\Re-\{-1\,,1\}$$

Puntos de corte con los ejes coordenados,

$$x=0 \quad\rightarrow\quad f(0)=\frac{3.0+2}{0^2-1}=\frac{2}{-1}=-2 \quad\rightarrow\quad (0\,,-2)$$

$$f(x)=0 \quad\rightarrow\quad \frac{3x+2}{x^2-1}=0 \quad\rightarrow\quad 3x+2=0 \quad\rightarrow\quad 3x=-2 \quad\rightarrow\quad x=\frac{-2}{3} \quad\rightarrow\quad \left(\frac{-2}{3}\,,0\right)$$

Hay dos puntos de corte $(0\,,-2)\ y \left(\dfrac{-2}{3}\,,0\right)$

b) Asíntota horizontal

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{3x+2}{x^2-1}=\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3}{x}=\frac{3}{-\infty}=0 \\[2ex] \displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+2}{x^2-1}=\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x}=\frac{3}{+\infty}=0 \end{array}\right\} \Rightarrow y=0 \quad \textit{es la asíntota horizontal}$$

Asíntotas verticales. Las posibles asíntotas verticales son las rectas $x=-1$ *y* $x=1$ *(corresponden a los valores de* x *que no son del dominio de la función)*

$x=-1$

$$\lim_{x\to-1}\frac{3x+2}{x^2-1}=\frac{3.(-3)+2}{(-1)^2-1}=\frac{-1}{1-1}=\frac{-1}{0}=\infty \qquad\rightarrow\quad x=-1 \textit{ es una asíntota vertical}$$

$x=1$

$$\lim_{x\to1}\frac{3x+2}{x^2-1}=\frac{3.1+2}{1^2-1}=\frac{5}{0}=\infty \qquad\rightarrow\quad x=1 \textit{ es una asíntota vertical}$$

c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento

Para obtener estos intervalos estudiaremos el signo de la primera derivada,

$$f'(x)=\frac{3(x^2-1)-(3x+2)2x}{(x^2-1)^2}=\frac{3x^2-3-6x^2-4x}{(x^2-1)^2}=\frac{-3x^2-4x-3}{(x^2-1)^2}$$

Estudiamos el signo de este cociente de polinomios buscando las raíces del numerador y denominador

$$-3x^2-4x-3=0 \quad\rightarrow\quad 3x^2+4x+3=0 \quad\rightarrow\quad x=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4.3.3}}{2.3}=\frac{-4\pm\sqrt{-20}}{6} \quad \textit{sin soluciones reales}$$

Por lo tanto, $-3x^2-4x-3=-(3x^2+4x+3)$ *es siempre negativo.*

$$(x^2-1)^2=0 \quad\rightarrow\quad x^2-1=0 \quad\rightarrow\quad x=\pm1 \qquad (\textit{ visto en el apartado a) })$$

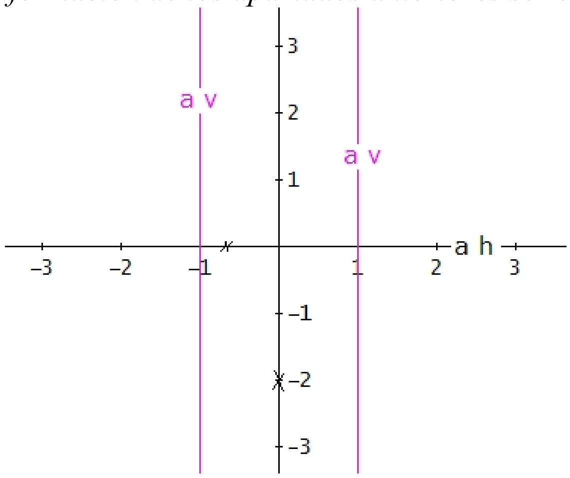
Ahora representamos en la recta real los valores de x *obtenidos y, además, los que no son del dominio de la función,*

Como el denominador de f´(x) está elevado al cuadrado, será positivo; luego el signo de f´(x) sólo depende del signo del numerador que hemos visto que es negativo, esto significa que:

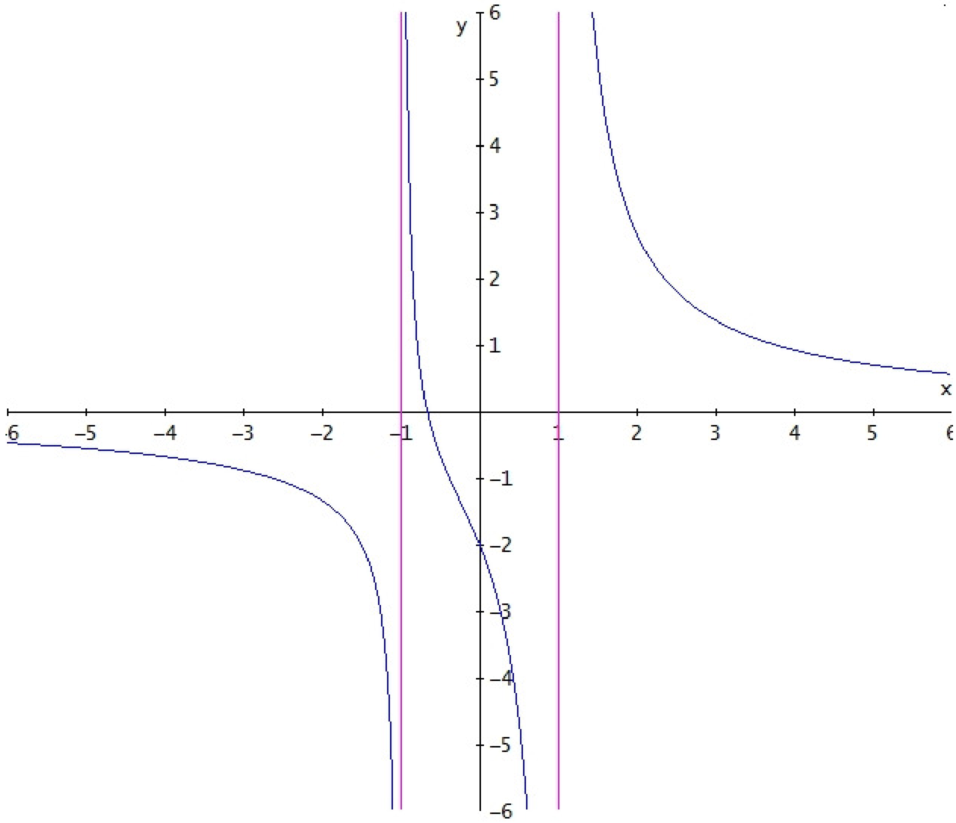
Y por lo tanto, f(x) es decreciente en su dominio. f(x) es decreciente en $\Re - \{-1, 1\}$

d) Máximos y mínimos locales.
Como f(x) es decreciente en su dominio, la función f(x) no tiene ni máximos ni mínimos locales.

e) La información de los apartados anteriores se resume en (marcamos los puntos de corte y las asíntotas):



Como la función es decreciente, su representación será:



Si no se ve directamente la representación anterior, podemos completar los datos buscando la posición de la curva respecto de sus asíntotas.
Veámoslo respecto de la asíntota horizontal:

$$en \quad -\infty, \quad x = -1000 \quad \rightarrow \quad \frac{3.(-1000)^2 + 2}{(-1000)^2 - 1} = \frac{-2998}{999999} \approx -0'...$$

$$en \quad +\infty, \quad x = 1000 \quad \rightarrow \quad \frac{3.1000^2 + 2}{1000^2 - 1} = \frac{3002}{999999} \approx 0'...$$

Esto significa que la posición de la curva respecto de la asíntota horizontal será