OPCIÓN B

PROBLEMA 1. Sean las matrices

$$A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & -2\end{pmatrix}\quad y\quad D=\begin{pmatrix}8 & 8\\ 8 & 3\end{pmatrix}$$

a) Calcula $A\,B + 3\,C$

b) Determina la matriz X que verifica $A\,X + I = D$, donde I es la matriz identidad.

Solución:

a)

$$AB+3C=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 7\\ -2 & 8\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6 & -3\\ 3 & -6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

b) $A\,X + I = D$

$A\,X = D - I$, *si conocemos* A^{-1},

$A^{-1}\,A\,X = A^{-1}\,(D - I)$

$X = A^{-1}\,(D - I)$

Cálculo de la matriz inversa de A,

$$A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 4\end{pmatrix}\qquad |\,A\,|=\begin{vmatrix}3 & 1\\ 2 & 4\end{vmatrix}=12-2=10\neq 0\quad\Rightarrow\quad\exists\,A^{-1}$$

Calculemos la matriz inversa de A:

$$\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 4\end{pmatrix}\text{cálculo de menores}:\begin{pmatrix}4 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}\quad\text{adjuntos}:\begin{pmatrix}4 & -2\\ -1 & 3\end{pmatrix}\quad\text{traspuesta}:\begin{pmatrix}4 & -1\\ -2 & 3\end{pmatrix}$$

Y finalmente:

$$A^{-1}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}4 & -1\\ -2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{4}{10} & \frac{-1}{10}\\ \frac{-2}{10} & \frac{3}{10}\end{pmatrix}$$

Luego,

$$X=A^{-1}(D-I)=\begin{pmatrix}\frac{4}{10} & \frac{-1}{10}\\ \frac{-2}{10} & \frac{3}{10}\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}8 & 8\\ 8 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}\frac{4}{10} & \frac{-1}{10}\\ \frac{-2}{10} & \frac{3}{10}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7 & 8\\ 8 & 2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{20}{10} & \frac{30}{10}\\ \frac{10}{10} & \frac{-10}{10}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$