OPCIÓN A

Problema 2. Se estima que el beneficio anual $B(t)$, en %, que produce cierta inversión viene determinado por el tiempo t en meses que se mantiene dicha inversión a través de la siguiente expresión:

$$B(t)=\frac{36t}{t^2+324}+1,\ t\geq 0.$$

a) Describe la evolución del beneficio en función del tiempo durante los primeros 30 meses.
b) Calcula, razonadamente, cuánto tiempo debe mantenerse dicha inversión para que el beneficio sea máximo. ¿Cuál es el beneficio máximo?
c) ¿Cuál sería el beneficio de dicha inversión si ésta se mantuviera en el tiempo de forma indefinida?

Solución:

Estudiemos la función $B(t)=\frac{36t}{t^2+324}+1,\ t\geq 0.$

$B(0)=\frac{36\,.\,0}{0^2+324}+1=\frac{0}{324}+1=0+1=1$, *la función* $B(t)$ *pasa por el punto* $(\,0\,,\,1\,)$

Estudiemos su monotonía

$$B'(t)=\frac{36\,.\left(t^2+324\right)-36\,.\,t\,.\,2t}{\left(t^2+324\right)^2}=\frac{36\,t^2+11664-72\,t^2}{\left(t^2+324\right)^2}=\frac{-36\,t^2+11664}{\left(t^2+324\right)^2}$$

$$B'(t)=0\ \rightarrow\ \frac{-36\,t^2+11664}{\left(t^2+324\right)^2}=0\ \rightarrow\ -36\,t^2+11664=0$$

$$36\,t^2=11664$$

$$t^2=\frac{11664}{36}=324$$

$$t=\pm\sqrt{324}=\pm 18$$

Como la función $B(t)$ *está definida para* $t\geq 0$, $t=18$.
Estudiemos el signo de $B'(t)$ *a la izquierda y derecha de 18,*

$$B'(1)=\frac{-36\,.\,1^2+11664}{\left(1^2+324\right)^2}=\frac{-36+11664}{325^2}=\frac{11628}{325^2}=+$$

$$B'(20)=\frac{-36\,.\,20^2+11664}{\left(20^2+324\right)^2}=\frac{-2376}{\left(20^2+324\right)^2}=-$$

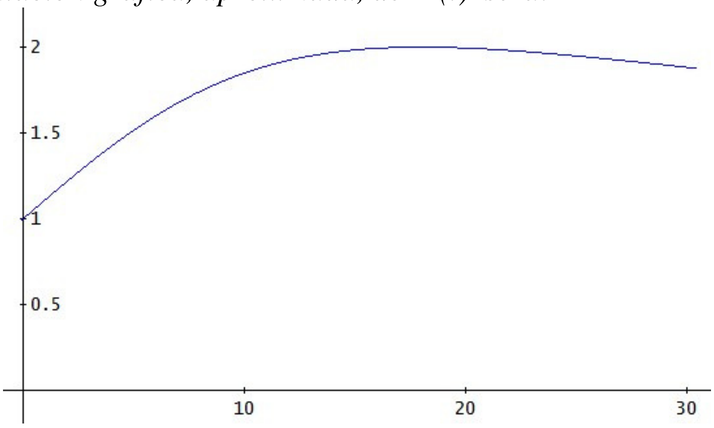
Es decir:

Por lo tanto, $B(t)$ *es creciente en* $(\,0\,,\,18\,)$ *y decreciente en* $(\,18\,,\,+\infty\,)$ *y para* $t=18$ *alcanza su máximo.*

$B(18)=\frac{36\,.\,18}{18^2+324}+1=2$, *el máximo está en el punto* $(\,18\,,\,2\,)$

Para responder al apartado a) calculemos el valor de $B(t)$ *para* $t=30$, $B(30)=\frac{36\,.\,30}{30^2+324}+1=1'8824$

La representación gráfica, aproximada, de $B(t)$ será:



Respondamos a los apartados.

a) Durante los 30 primeros meses la evolución del beneficio es: empieza proporcionando un beneficio del 1% y va creciendo hasta los 18 meses en que alcanza su valor máximo, un 2%. A partir de los 18 meses, a medida que aumenta el tiempo que se mantiene la inversión el beneficio desciende y manteniéndola 30 meses alcanza el valor de 1´8824%.

b) Según hemos calculado anteriormente el beneficio máximo se alcanza manteniendo la inversión durante 18 meses. Este beneficio máximo es del 2%.

c) Para obtener el beneficio de esta inversión si se mantuviera de forma indefinida debemos calcular el siguiente límite,

$$\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{36t}{t^2+324}+1\right)=\lim_{t\to+\infty}\frac{36t+t^2+324}{t^2+324}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{t\to+\infty}\frac{t^2}{t^2}=\lim_{t\to+\infty}1=1$$

Si la inversión se mantuviera en el tiempo de forma indefinida, el beneficio sería del 1%.