OPCIÓN B

Problema 1. Sea el siguiente sistema de inecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x+y \geq 1 \\ x+y \leq 2 \\ -x+y \leq 1 \\ x-y \leq 1 \end{cases}$$

a) Resuélvelo gráficamente.
b) Halla el máximo y el mínimo de la función $z = 2x + y$ en el conjunto solución de dicho sistema.

Solución:
a) Efectuamos los cálculos necesarios para la representación gráfica de las inecuaciones.

$(a) \quad x+y \geq 1$

$x+y=1$

$$\begin{array}{c|c} x & y \\ \hline 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array}$$

$¿(0,0)\ cumple?$

$0+0 \geq 1\ No$

$(b) \quad x+y \leq 2$

$x+y=2$

$$\begin{array}{c|c} x & y \\ \hline 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{array}$$

$¿(0,0)\ cumple?$

$0+0 \leq 2\ Sí$

$(c) \quad -x+y \leq 1$

$-x+y=1$

$$\begin{array}{c|c} x & y \\ \hline 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{array}$$

$¿(0,0)\ cumple?$

$0+0 \leq 1\ Sí$

$(c) \quad x-y \leq 1$

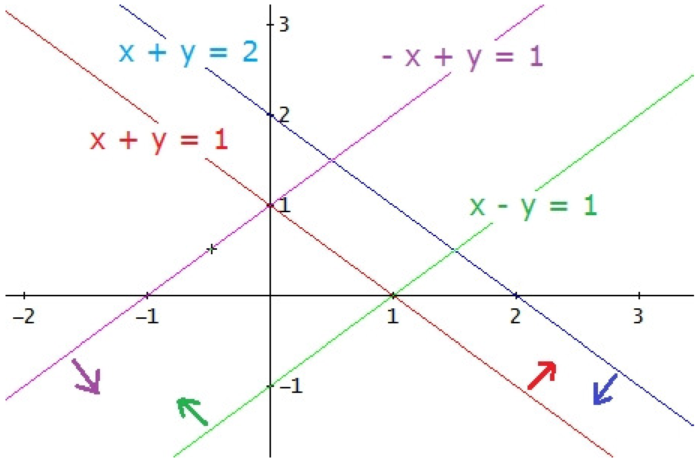
$x-y=1$

$$\begin{array}{c|c} x & y \\ \hline 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{array}$$

$¿(0,0)\ cumple?$

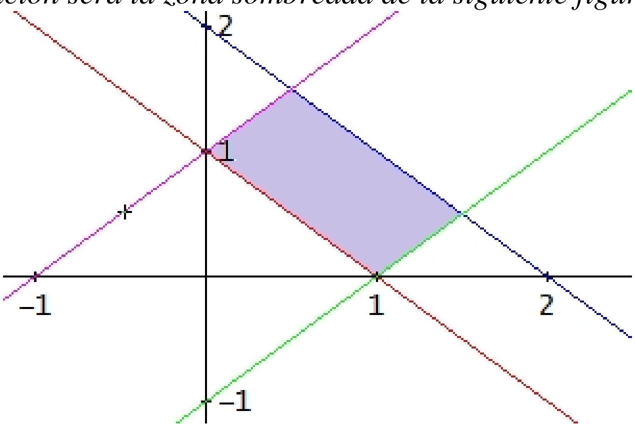
$0-0 \leq 1\ Sí$

La representación gráfica será:



La región factible está formada por los puntos de coordenada natural de la zona sombreada.

La solución será la zona sombreada de la siguiente figura:



b) Obtengamos los vértices de la región anterior.

Por construcción conocemos los siguientes vértices: A (0 , 1) y B (1 , 0). Obtengamos los otros dos.

C, corte entre (b) y (d): $C\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$

$$\begin{cases} x+y=2 \\ x-y=1 \end{cases}$$

sumando ambas ecuaciones: 2 x = 3, luego $x=\frac{3}{2}$

sustituyendo el valor de x en la 1ª ecuación: $\frac{3}{2}+y=2 \quad \rightarrow \quad y=2-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$

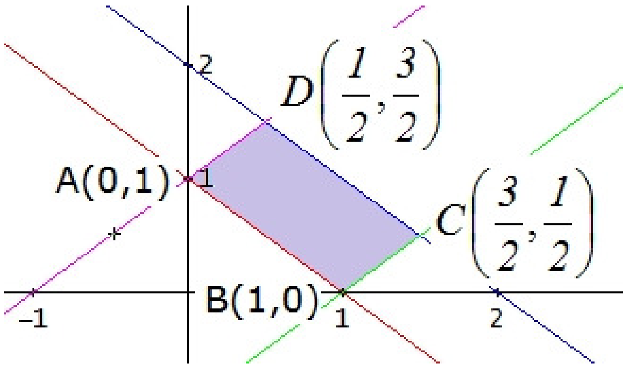
D, corte entre (b) y (c): $D\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$

$$\begin{cases} x+y=2 \\ -x+y=1 \end{cases}$$

sumando ambas ecuaciones: 2 y = 3, luego $y=\frac{3}{2}$

sustituyendo el valor de y en la 1ª ecuación: $x+\frac{3}{2}=2 \quad \rightarrow \quad x=2-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$

Los vértices del conjunto solución del apartado a) son:



Sabemos que los extremos de la función z se alcanzan en los vértices del conjunto solución anterior. Calculemos los valores de la función en los vértices,

x , y	z = 2 x + y	
0 , 1	2 . 0 + 1 = 1	*mínimo*
1 , 0	2 . 1 + 0 = 2	
$\frac{3}{2},\frac{1}{2}$	$2\cdot\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=3+\frac{1}{2}=\frac{7}{2}=3'5$	*máximo*
$\frac{1}{2},\frac{3}{2}$	$2\cdot\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=1+\frac{3}{2}=\frac{5}{2}=2'5$	

La función z = 2 x + y alcanza el máximo, que vale 3´5, en el punto $C\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$ ***y el mínimo, que vale 1, en el punto A (0 , 1).***