OPCIÓN B

Problema 2. Sea la función $f(x) = (x^2 + x)^2$. Se pide

a) Su dominio y puntos de corte con los ejes coordenados.
b) Las ecuaciones de sus asíntotas verticales y horizontales, si las hay.
c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
d) Los máximos y mínimos locales.
e) La representación gráfica a partir de la información de los apartados anteriores.

Solución:

a) Como f(x) es un polinomio al cuadrado, f(x) puede calcularse para cualquier valor de x. Por lo tanto $Dom\ f(x) = \Re$

Puntos de corte con los ejes coordenados,

$x = 0 \rightarrow f(0) = (0^2 + 0)^2 = 0 \rightarrow (0,0)$

$f(x) = 0 \rightarrow (x^2 + x)^2 = 0$

$x^2 + x = 0$

$$x(x+1) = 0 \quad \left\langle \begin{array}{l} x = 0 \rightarrow (0,0) \\ x+1 = 0 \rightarrow x = -1 \rightarrow (-1,0) \end{array} \right.$$

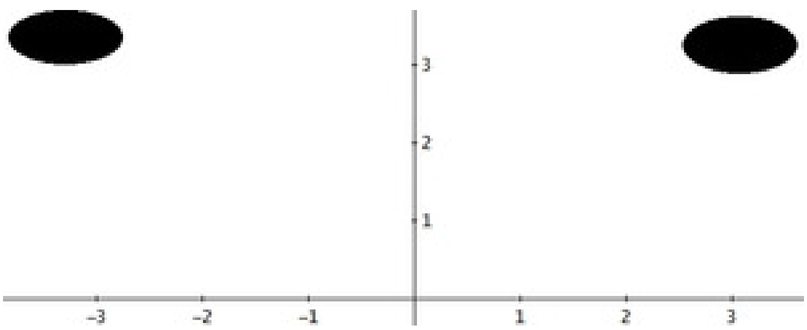
Los puntos de corte con los ejes coordenados son $(-1, 0)$ *y* $(0, 0)$

b) Puesto que $Dom\ f(x) = \Re$, *f(x) no tiene asíntotas verticales.*

Veamos si tiene horizontales,

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} \left(x^2 + x\right)^2 = +\infty \\ \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^2 + x\right)^2 = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \textit{no hay asíntota horizontal}$$

Estos límites no informan de la posición de la función en -∞ y +∞,



c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento

Para obtener estos intervalos estudiaremos el signo de la primera derivada,

$$f'(x) = 2\left(x^2 + x\right)(2x+1) = \left(x^2 + x\right)(4x+2) = 4x^3 + 2x^2 + 4x^2 + 2x = 4x^3 + 6x^2 + 2x$$

Estudiamos el signo de este polinomio buscando sus raíces,

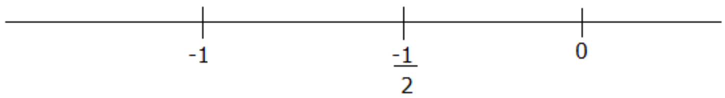
$4x^3 + 6x^2 + 2x = 0$

$$2x\left(2x^2+3x+1\right)=0 \left\langle \begin{array}{l} 2x=0 \quad \rightarrow \quad x=0 \\ 2x^2+3x+1=0 \quad \rightarrow \quad x=\dfrac{-3\pm\sqrt{3^2-4.2.1}}{2.2}=\dfrac{-3\pm\sqrt{9-8}}{4}=\dfrac{-3\pm\sqrt{1}}{4}= \end{array} \right.$$

$$=\frac{-3\pm 1}{4}=\left\langle \begin{array}{l} x_1=\dfrac{-3+1}{4}=\dfrac{-2}{4}=\dfrac{-1}{2} \\ x_2=\dfrac{-3-1}{4}=\dfrac{-4}{4}=-1 \end{array} \right.$$

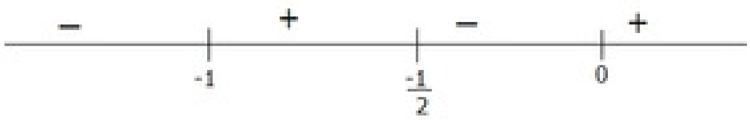
De la ecuación polinómica de tercer grado hemos obtenido sus tres raíces: $-1,\ \dfrac{-1}{2}$ *y* 0.

Ahora representamos en la recta real los valores de x *obtenidos,*



Conociendo el signo de f´(x) en uno de los intervalos sabremos el signo en los restantes, los signos van alternando (por ser polinomio de tercer grado con tres raíces)

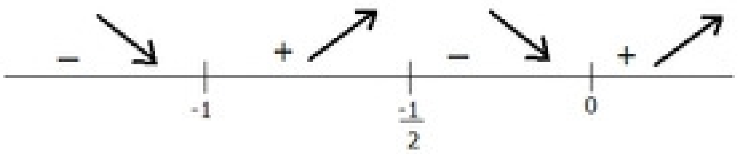
$x=1 \quad \rightarrow \quad f'(1)=4\,.\,1^3+5\,.\,1^2+1=4+5+1=10>0$, *luego*



Y por lo tanto, f(x) es creciente en $\left(-1,\dfrac{-1}{2}\right)\cup\left(0,+\infty\right)$ *y decreciente en* $\left(-\infty,-1\right)\cup\left(\dfrac{-1}{2},0\right)$.

d) Máximos y mínimos locales.

Del estudio del apartado anterior sabemos que los extremos locales de f(x) serán,



Mínimos locales:

$x=-1 \quad \rightarrow \quad f(-1)=\left((-1)^2+(-1)\right)^2=\left(1-1\right)^2=0 \quad \rightarrow \quad \left(-1,0\right)$ *Mínimo local*

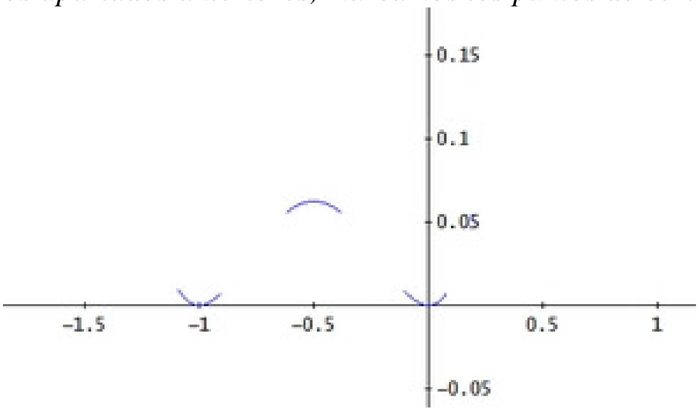
$x = 0 \;\rightarrow\; f(0) = 0$ *(calculado en a))* $\rightarrow\; (0, 0)$ *Mínimo local*

Máximo local:

$$x=\frac{-1}{2} \quad \rightarrow \quad f(-1)=\left(\left(\frac{-1}{2}\right)^2+\left(\frac{-1}{2}\right)\right)^2=\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{1-2}{4}\right)^2=\left(\frac{-1}{4}\right)^2=\frac{1}{16} \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\frac{-1}{2},\frac{1}{16}\right) \quad \textit{Máximo local}$$

e) A partir de los apartados anteriores, marcamos los puntos de corte y los extremos locales



Considerando la monotonía de la función, su representación será: