Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 2. Dada la función $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$, se pide:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. *(2 puntos)*
b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. *(2 puntos)*
c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento. *(2 puntos)*
d) Los máximos y mínimos locales. *(2 puntos)*
e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados de los apartados anteriores. *(2 puntos)*

Solución:
a) Dominio,

$$x-1=0 \quad\rightarrow\quad x=1 \quad\rightarrow\quad Dom\ f(x)=\Re-\{\,1\,\}$$

Puntos de corte con los ejes coordenados,

$$x=0 \quad\rightarrow\quad f(0)=\frac{0^2}{0-1}=0 \quad\rightarrow\quad (0\,,0)$$

$$f(x)=0 \quad\rightarrow\quad \frac{x^2}{x-1}=0 \quad\rightarrow\quad x^2=0 \quad\rightarrow\quad x=0 \quad\rightarrow\quad (0\,,0)$$

Sólo hay un punto de corte con los ejes coordenados, el (0 , 0).

b) Asíntota horizontal y asíntota vertical.
Asíntota horizontal,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x-1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to-\infty} x=-\infty$$

, *No hay asíntota horizontal.*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x-1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$$

Asíntotas verticales.
Del dominio de la función deducimos que hay una posible A.V. x = 1

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2}{x-1}=\frac{1^2}{1-1}=\frac{1}{0}=\infty \quad\rightarrow\quad x=1 \quad es\ A.V.$$

No hay asíntota horizontal y la asíntota vertical es x = 1.

c) Monotonía.
Estudiemos el signo de $f'(x)$

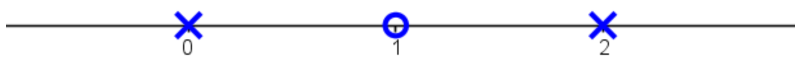
$$f'(x)=\frac{2x\cdot(x-1)-x^2\cdot1}{(x-1)^2}=\frac{2x^2-2x-x^2}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$$

Obtengamos las raíces del numerador y denominador,

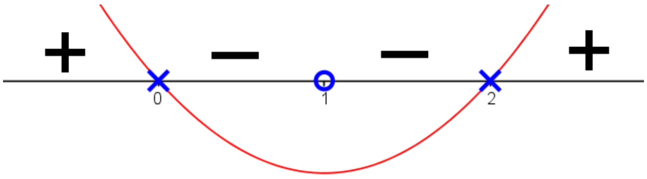
$$x^2-2x=0 \quad\rightarrow\quad x\cdot(x-2)=0 \quad\rightarrow\quad \begin{cases} x=0 \\ x-2=0 \quad\rightarrow\quad x=2 \end{cases}$$

$$(x-1)^2=0 \quad\rightarrow\quad x-1=0 \quad\rightarrow\quad \{resuelta\ en\ a)\} \quad x=1\notin Dom\ f(x)$$

Por tanto, debemos estudiar el signo de $f'(x)$ en los intervalos:



El denominador de $f'(x)$ está elevado al cuadrado, siempre será positivo. El signo de $f'(x)$ sólo depende del numerador que, gráficamente, es un polinomio de 2º grado con coeficiente de x^2 positivo y raíces 0 y 2, luego,



Por tanto,

f(x) es creciente en $\boldsymbol{(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)}$ ***y f(x) es decreciente en*** $\boldsymbol{(0, 1) \cup (1, 2)}$***.***

d) Máximos y mínimos locales.

Del estudio anterior deducimos que en $x = 0$ hay un máximo local y en $x = 2$ hay un mínimo local.

$$x = 0 \quad \rightarrow \quad f(0) = 0$$

$$x = 2 \quad \rightarrow \quad f(2) = \frac{2^2}{2-1} = 4$$

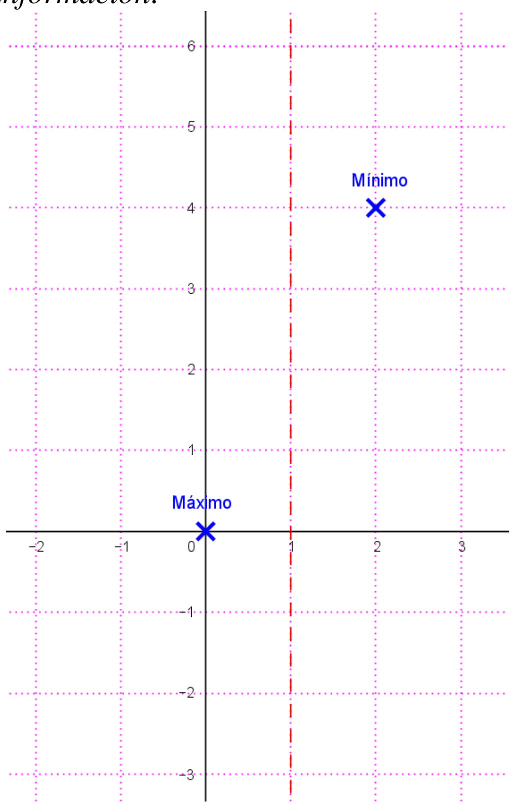
Por tanto, ***en (0 , 0) hay un máximo local y en (2 , 4) hay un mínimo local****.*

e) Representación gráfica.

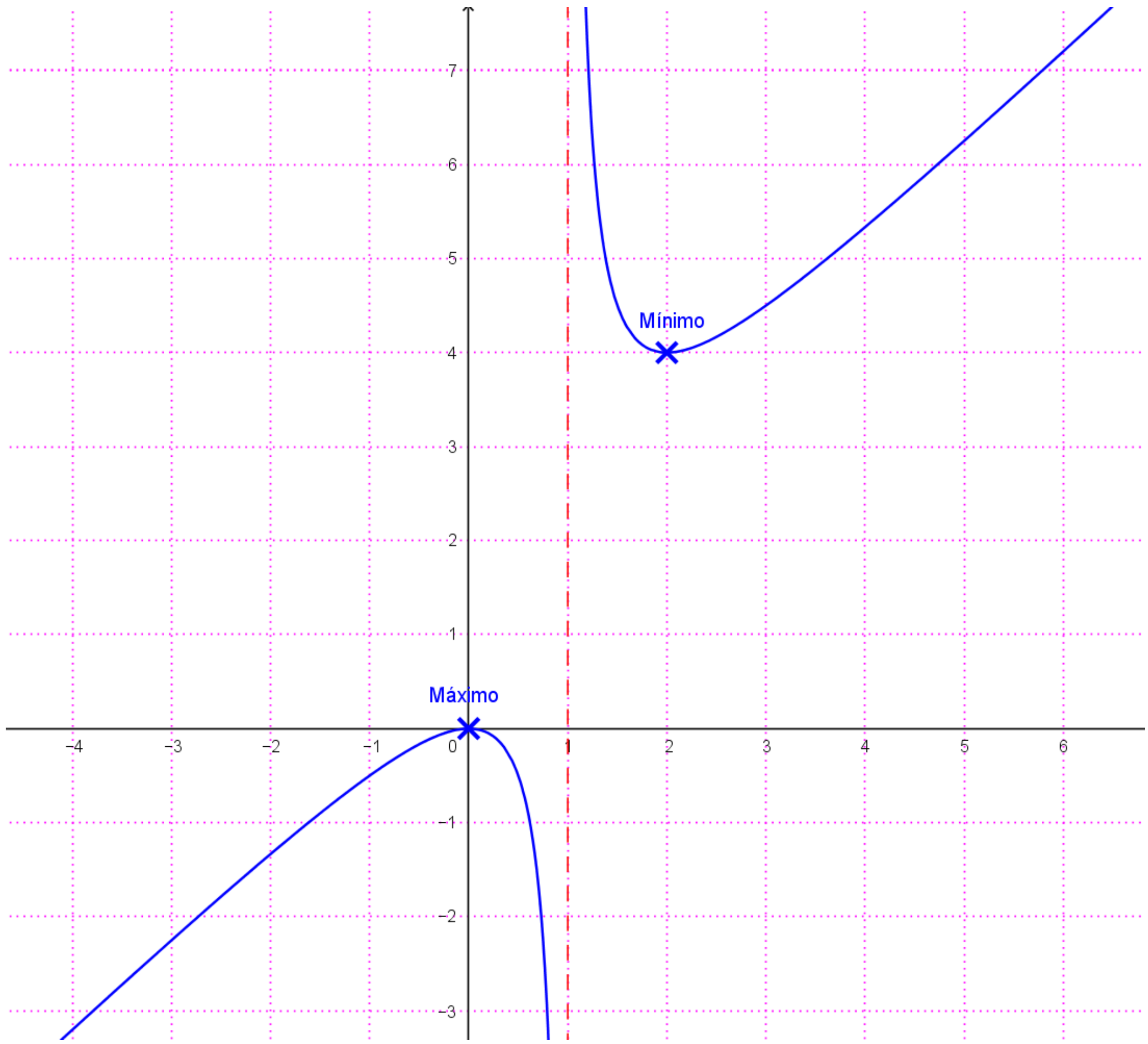
De lo estudiado en los apartados anteriores sabemos:

Corte con ejes coordenados (0 , 0), máximo local en (0, 0), mínimo local en (2, 4); a.v. $x = 1$.

Representando gráficamente esta información:



Considerando los intervalos de crecimiento y decrecimiento obtenidos, la representación gráfica de f(x) es:



Otro cálculo para completar la representación gráfica es la posición de la curva con respecto a la asíntota vertical,

A.V. $x = 1$,

$$\underset{x\to 1^-}{Lím}\frac{x^2}{x-1} \overset{x=0'9}{=} \frac{+}{-}\infty = -\infty$$

$$\underset{x\to 1^+}{Lím}\frac{x^2}{x-1} \overset{x=1'1}{=} \frac{+}{+}\infty = +\infty$$