Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 3. De dos sucesos A y B se sabe que satisfacen que P(A)=0,4, P($A \cup B$)=0,8 y P($A^c \cup\ B^c$)=0,7, donde A^c y B^c representan los sucesos complementarios de los sucesos A y B, respectivamente. Se pide:

a) ¿Son independientes los sucesos A y B? *(2´5 puntos)*
b) La probabilidad de que sólo se verifique uno de los sucesos. *(2´5 puntos)*
c) La probabilidad de que se verifique el suceso B^c. *(2´5 puntos)*
d) La probabilidad de que se verifique el suceso A^c/B. *(2´5 puntos)*

Solución:
a) ¿A y B son independientes?

Los sucesos A y B son independientes si $P(A \cap B) = P(A) \,.\, P(B)$

A partir de los datos del problema calculemos las probabilidades que faltan {P(B) y P(A∩B)}

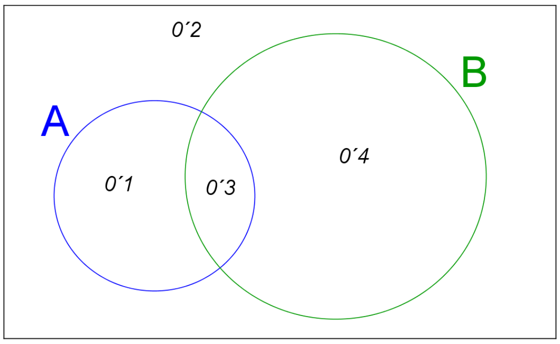
Como $P(A^c \cup B^c) = 0´7$, *aplicando las leyes de Morgan:* $P(A^c \cup B^c) = P(\ (A \cap B)^c\ ) = 1 - P(A \cap B)$, *luego:* $0´7 = 1 - P(A \cap B)$; $P(A \cap B) = 1 - 0´7 = 0´3$.

Por otro lado, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ *entonces:* $0´8 = 0´4 + P(B) - 0´3$; $0´8 = 0´1 + P(B)$; $P(B) = 0´8 - 0´1 = 0´7$.

Por tanto, $P(A \cap B) = 0´3$
$P(A) \,.\, P(B) = 0´4 \,.\, 0´7 = 0´28$

Es decir, $P(A \cap B) \neq P(A) \,.\, P(B)$ *y, en conclusión,* ***A y B no son sucesos independientes***.

Para resolver los siguientes apartados utilizaremos el diagrama de Venn con estos dos sucesos:



b) Probabilidad de que sólo se verifique uno de los sucesos.
Del diagrama anterior, P(sólo se verifica A) = 0´1 y P(sólo se verifica B) = 0´4.
P(sólo se verifique uno de los sucesos) = 0´1 + 0´4 = 0´5

P(sólo se verifique uno de los sucesos) = 0´5

c) $P(B^c)$
$P(B^c) = 1 - P(B) = 1 - 0´7 = 0´3$.

$\boldsymbol{P(B^c) = 0´3}$

d) P(A^c/B)

$$P\left(A^c/B\right) = \frac{P\left(A^c \cap B\right)}{P(B)} = \frac{0'4}{0'7} = \frac{4}{7}$$

Por tanto, $P\left(A^c/B\right) = \frac{4}{7}$.