OPCIÓN A

PROBLEMA A.1. Comprobar **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado** que:

a) Si el producto de dos matrices cuadradas A y B es conmutativo, es decir que $A\,B = B\,A$, entonces se deduce que $A^2\,B^2 = (A\,B)^2$. *(2 puntos).*

b) Que la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 10 \\ 0 & -3 & 7 \end{pmatrix}$ satisface la relación $A^2 - 3\,A + 2\,I = O$, siendo I y O, respectivamente, las matrices de orden 3x3 unidad y nula, *(4 puntos)*, y que una matriz A tal que $A^2 - 3\,A + 2\,I = O$ tiene matriz inversa. *(2 puntos).*

c) Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**, los valores α y β tales que $A^3 = \alpha\,A + \beta\,I$, sabiendo que la matriz A verifica la igualdad $A^2 - 3\,A + 2\,I = O$. *(2 puntos).*

Solución:

a) Debemos comprobar que, si $A\,B = B\,A \;\rightarrow\; A^2\,B^2 = (A\,B)^2$

$A^2\,B^2 = A\,A\,B\,B =$ *(como el producto de matrices es asociativo)*

$= A\,(\,A\,B\,)\,B =$ *(como* $A\,B = B\,A$ *)*

$= A\,(\,B\,A\,)\,B =$ *(como el producto de matrices es asociativo)*

$= (\,A\,B\,)\,(\,A\,B\,) = (A\,B)^2$ *(como queríamos comprobar)*

b) Calculemos,

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 10 \\ 0 & -3 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 10 \\ 0 & -3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-4)(-4)+10(-3) & (-4)10+10.7 \\ 0 & (-3)(-4)+7(-3) & (-3)10+7.7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & 30 \\ 0 & -9 & 19 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - 3A + 2I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & 30 \\ 0 & -9 & 19 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 10 \\ 0 & -3 & 7 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & 30 \\ 0 & -9 & 19 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & -30 \\ 0 & 9 & -21 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto hemos comprobado que $A^2 - 3\,A + 2\,I = O$

* * *

Si A *es una matriz que cumple* $A^2 - 3\,A + 2\,I = O \;\rightarrow\; \exists\, A^{-1}$

Para comprobar que la matriz A *tiene inversa debemos obtener una expresión del tipo* A *(matriz)* $= I$

Partimos de: $A^2 - 3\,A + 2\,I = O$*, luego,*

$A^2 - 3\,A = O - 2\,I$

$A^2 - 3\,A = -\,2\,I$*, por la propiedad distributiva del producto respecto de la diferencia de matrices,*

$A\,(\,A - 3\,I\,) = -\,2\,I$*, multiplicando ambos miembros por* $\dfrac{-1}{2}$

$$A\,(A-3I)\frac{-1}{2} = I$$

Hemos obtenido que $A\left[(A-3I)\dfrac{-1}{2}\right] = I$ *, por lo tanto la matriz inversa de* A *es* $\left[(A-3I)\dfrac{-1}{2}\right]$

c) Como $A^2 - 3A + 2I = O$

Multiplicando ambos miembros de la igualdad por la matriz A *por la derecha,*

$A^2 A - 3AA + 2IA = OA$, *operando*

$A^3 - 3A^2 + 2A = O$, *despejando* A^3

$A^3 = 3A^2 - 2A$,

Como $A^2 - 3A + 2I = O$, $A^2 = 3A - 2I$, *por lo tanto*

$A^3 = 3(3A - 2I) - 2A = 9A - 6I - 2A = 7A - 6I$

Hemos obtenido: $A^3 = 7A - 6I$, *por lo tanto los valores de* α *y* β *buscados serán* $\boldsymbol{\alpha = 7}$ ***y*** $\boldsymbol{\beta = -6}$.