Matemáticas II Julio 2013

OPCIÓN A

PROBLEMA A.2. Se dan las rectas $r_1:\begin{cases} x=1+2\alpha \\ y=\alpha \\ z=2-\alpha \end{cases}$ y $r_2:\begin{cases} x=-1 \\ y=1+\beta \\ z=-1-2\beta \end{cases}$,siendo α y β parametros reales. Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Unas ecuaciones implícitas de r_1. *(2 puntos).*

b) La justificación de que las rectas r_1 y r_2 están contenidas en un plano π, *(2 puntos)* y la ecuación de ese plano π, *(2 puntos).*

c) El área del triángulo de vértices P, Q y R, siendo $P = (-1, 0, 1)$, $Q = (0, 1, 2)$ y R el punto de intersección de r_1 y r_2. *(4 puntos).*

Solución:

a) Ecuaciones implícitas de r_1

Conocemos la ecuación vectorial de r_1, a partir de ella obtenemos su ecuación continua,

$r_1: \dfrac{x-1}{2} = y = \dfrac{z-2}{-1}$. *Una ecuación implícita de r_1 será:* $\begin{cases} \dfrac{x-1}{2} = y \\ y = \dfrac{z-2}{-1} \end{cases}$ *, efectuando las operaciones,*

$$\begin{cases} x-1=2y \\ -y=z-2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x-2y-1=0 \\ y+z-2=0 \end{cases}$$

Solución: $r_1:\begin{cases} x-2y-1=0 \\ y+z-2=0 \end{cases}$

b) Justificar que r_1 y r_2 están contenidas en un plano.

Las rectas r_1 y r_2 estarán contenidas en un plano si son paralelas o si se cortan.

Estudiemos la posición relativa de las dos rectas. Para ello debemos estudiar el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 1+2\alpha=-1 \\ \alpha=1+\beta \\ 2-\alpha=-1-2\beta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2\alpha=-2 \\ \alpha-\beta=1 \\ -\alpha+2\beta=-3 \end{cases}$$

, es un sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas.

Su matriz de coeficientes es $M=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ *y su matriz ampliada* $M' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

Calculemos el rango de M. M es 3x2, su máximo rango será 2.

$$|2| = 2 \neq 0 \rightarrow ran(M) \geq 1$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \rightarrow ran(M) = 2$$

Calculemos el rango de M´. M´ es 3x3, su máximo rango será 3.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 6-4+2-4=0 \rightarrow ran(M') = 2$$

Hemos obtenido que ran (M) = ran (M´) = 2 = número de incógnitas, por lo tanto es un sistema compatible determinado. Es decir, las rectas r_1 y r_2 se cortan. Luego, ***las dos rectas están contenidas en un plano****.*

Para obtener la ecuación de este plano, obtengamos el punto, R, de corte entre r_1 y r_2.

Del estudio de rangos realizado anteriormente, el sistema a resolver será: $\begin{cases} 2\alpha = -2 \\ \alpha - \beta = 1 \end{cases}$

De la 1ª ecuación: α = – 1. Con esta solución es suficiente para obtener el punto R.

Sustituyendo el valor de α en la ecuación de r_1: $\begin{cases} x = 1 + 2(-1) = 1 - 2 = -1 \\ y = -1 \\ z = 2 - (-1) = 2 + 1 = 3 \end{cases} \rightarrow$ ***R (– 1 , – 1 , 3)***

Del plano π que contiene a r_1 y r_2 conocemos: $\left\langle \begin{array}{l} \text{punto } R\,(-1, -1, 3) \\ \text{vectores directores} \left\langle \begin{array}{l} \text{de } r_1 \rightarrow \vec{u}(2, 1, -1) \\ \text{de } r_2 \rightarrow \vec{v}(0, 1, -2) \end{array} \right. \end{array} \right.$

Su ecuación se obtiene: $\begin{vmatrix} x+1 & y+1 & z-3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$

$$(x+1)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - (y+1)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + (z-3)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x+1)\,(-2+1) - (y+1)\,(-4) + (z-3)\,(2) = 0$$

$$-x - 1 + 4y + 4 + 2z - 6 = 0$$

$$-x + 4y + 2z - 3 = 0$$

Solución, π: – x + 4 y + 2 z – 3 = 0

c) Área del triángulo de vértices P (– 1 , 0, 1), Q (0, 1, 2) y R (– 1 , – 1 , 3).
Conociendo los tres vértices del triángulo, su área podemos calcularla mediante la fórmula:

$$A_T = \frac{1}{2}\left| \vec{PR} \ x \ \vec{QR} \right|$$

$$\vec{PR} = (-1,-1,3) - (-1,0,1) = (0,-1,2)$$

$$\vec{QR} = (-1,-1,3) - (0,1,2) = (-1,-2,1)$$

$$\vec{PR} \ x \ \vec{QR} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i}\,(-1+4) - \vec{j}\,(+2) + \vec{k}\,(-1) = (3, -2, -1)$$

$$\left| \vec{PR} \ x \ \vec{QR} \right| = \left| (3, -2, -1) \right| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{9+4+1} = \sqrt{14}$$

Finalmente, $A_T = \frac{1}{2}\sqrt{14}\ u^2 = 1´8708286...\,u^2 \cong 1´8708\ u^2$