Matemáticas II Julio 2013

OPCIÓN B

PROBLEMA B.1. Se da el sistema de ecuaciones $\begin{cases} \alpha x + y + z = 1 \\ x + \alpha y + z = 1 \\ 3x + 5y + z = 1 \end{cases}$, donde α es un parámetro real. Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Todas las soluciones del sistema cuando $\alpha = 7$. *(4 puntos).*
b) Los valores de α para los que el sistema es compatible indeterminado. *(3 puntos).*
c) Los valores de α para los que el sistema es compatible determinado. *(3 puntos).*

Solución:

Estudiemos el sistema $\begin{cases} \alpha x + y + z = 1 \\ x + \alpha y + z = 1 \\ 3x + 5y + z = 1 \end{cases}$. *Su matriz ampliada, A´, es* $\left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 \end{array}\right)$

La matriz de coeficientes, A, es 3x3 por lo que su máximo rango posible será 3.
A´ es 3x4 por lo que su máximo rango posible será 3.

Empezamos estudiando el rango de A,

$$\begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \alpha^2 + 5 + 3 - 3\alpha - 5\alpha - 1 = \alpha^2 - 8\alpha + 7$$

$$\alpha^2 - 8\alpha + 7 = 0 \quad \rightarrow \quad \alpha = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4.1.7}}{2.1} = \frac{8 \pm \sqrt{64-28}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{8 \pm 6}{2} = \begin{cases} \alpha_1 = \frac{14}{2} = 7 \\ \alpha_2 = \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$$

Para $\alpha \neq 1, 7$ $\rightarrow$ *ran (A) = 3 = ran(A´) = nº de incógnitas* $\rightarrow$ *Sistema Compatible Determinado*

Para $\alpha = 7$,

$$A´ = \left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad y \ \ sabemos\ que \ \ |A| = 0 \quad \rightarrow \quad ran\ (A) \leq 2$$

Calculemos el rango de A,

$$\left.\begin{array}{l} |7| = 7 \neq 0 \\ \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 49 - 1 = 48 \neq 0 \end{array}\right\} \rightarrow \quad ran\ (A) = 2$$

Calculemos el rango de A´,

Sólo nos falta por estudiar el menor de orden 3 que se obtiene al añadir al orlar el menor de orden 2 no nulo anterior con la tercera fila y la cuarta columna de A´,

$$\begin{vmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = |A| = 0 \quad \rightarrow \quad ran\ (A´) = 2$$

Por lo que, ran (A) = ran (A´) = 2 < nº de incógnitas. Para $\alpha = 7$ *el sistema es compatible indeterminado.*

Para $\alpha = 1$,

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 \end{array} \right),$$ *esta matriz tiene la 1ª y 2ª filas iguales, a efectos de cálculo de rango podemos eliminar una de ellas, por lo tanto el máximo rango de A y A´ será 2.*

Calculemos el rango de A,

$$\left. \begin{array}{l} |1| = 1 \neq 0 \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 3 = 2 \neq 0 \end{array} \right\} \rightarrow \quad ran\,(A) = 2$$

Luego ran (A) = ran (A´) = 2 < nº de incógnitas. Para $\alpha = 1$ el sistema es compatible indeterminado.

Procedamos a resolver los apartados.

a) Para $\alpha = 7$ sabemos que el sistema es compatible indeterminado

Por el estudio realizado anteriormente, el sistema a resolver está formado por la 1ª y 2ª ecuaciones y las incógnitas principales son x e y:

$$\begin{cases} 7z + y = 1 - z \\ x + 7y = 1 - z \end{cases} \rightarrow \quad \begin{array}{l} x = \dfrac{\begin{vmatrix} 1-z & 1 \\ 1-z & 7 \end{vmatrix}}{48} = \dfrac{7 - 7z - 1 + z}{48} = \dfrac{6 - 6z}{48} = \dfrac{1-z}{8} \\[2ex] y = \dfrac{\begin{vmatrix} 7 & 1-z \\ 1 & 1-z \end{vmatrix}}{48} = \dfrac{7 - 7z - 1 + z}{48} = \dfrac{6 - 6z}{48} = \dfrac{1-z}{8} \end{array}$$

Para $\alpha = 7$, la solución es:
$$\begin{cases} x = \dfrac{1-\lambda}{8} \\ y = \dfrac{1-\lambda}{8} \quad \lambda \in \Re \\ z = \lambda \end{cases}$$

b) Del estudio inicial, ***el sistema es compatible indeterminado para $\alpha = 1$ y $\alpha = 7$****.*

c) Del estudio inicial, ***el sistema es compatible determinado para $\alpha \neq 1$ y 7, es decir,*** $\alpha \in \Re - \{1, 7\}$.