OPCIÓN B

PROBLEMA B.2. Se dan las rectas $r:\begin{cases} x-y+z=0 \\ 2x+y+z=1 \end{cases}$ y $s:\{x-1=y-2=z$. Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Un punto y un vector director de cada una de las dos rectas. *(3 puntos).*

b) La distancia entre las rectas r y s, *(2 puntos)*, **justificando** que las rectas r y s se cruzan. *(2 puntos).*

c) Obtener unas ecuaciones de la recta t que pasa por el punto $\left(\frac{41}{57},\ -\frac{14}{57},\ 0\right)$ y es perpendicular a las rectas r y s. *(3 puntos).*

Solución:

a) De la recta $r:\begin{cases} x-y+z=0 \\ 2x+y+z=1 \end{cases}$ *obtengamos su ecuación paramétrica.*

Como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=1+2=3\neq 0$, *resolvemos el sistema:* $\begin{cases} x-y=-z \\ 2x+y=1-z \end{cases}$

Sumando ambas ecuaciones: 3 x = 1 – 2 z

$x=\frac{1-2z}{3}$

Sustituyendo en la 1ª ecuación,

$\frac{1-2z}{3}-y=-z;\quad \frac{1-2z}{3}+z=y$

$y=\frac{1-2z+3z}{3}=\frac{1+z}{3}$

La ecuación paramétrica de la recta r será: $\begin{cases} x=\frac{1-2\lambda}{3} \\ y=\frac{1+\lambda}{3} \\ z=\lambda \end{cases}\quad \lambda\in\Re$

*De la **recta r** tenemos: **punto*** $P_r=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},0\right)$ *y **vector director*** $\vec{v_r}=\left(\frac{-2}{3},\frac{1}{3},1\right)$, *más sencillamente,* $\vec{v_r}=(-2,1,3)$.

De la recta $s:\{x-1=y-2=z$, *tenemos su ecuación continua, por lo tanto se deduce: **punto*** $P_s=(1,2,0)$ ***y vector director*** $\vec{v_s}=(1,1,1)$.

b) Veamos si las rectas r y s se cruzan.

Las ecuaciones paramétricas de estas rectas son: $r:\begin{cases} x=\dfrac{1-2\lambda}{3} \\ y=\dfrac{1+\lambda}{3} \\ z=\lambda \end{cases} \quad \lambda\in\Re \qquad y \qquad s:\begin{cases} x=1+\mu \\ y=2+\mu \\ z=\mu \end{cases} \quad \mu\in\Re$

Estudiemos el sistema: $\begin{cases} \dfrac{1-2\lambda}{3}=1+\mu \\ \dfrac{1+\lambda}{3}=2+\mu \\ \lambda=\mu \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1-2\lambda=3+3\mu \\ 1+\lambda=6+3\mu \\ \lambda=\mu \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2\lambda-3\mu=2 \\ \lambda-3\mu=5 \\ \lambda-\mu=0 \end{cases}$

La matriz ampliada de este sistema es $A'=\left(\begin{array}{cc|c} -2 & -3 & 2 \\ 1 & -3 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$,

A´ es 3x3 → máximo rango de A´ es 3; A es 3x2 → máximo rango de A es 2.
Calculemos el rango de A´,

$$\left.\begin{array}{l} |-2|=-2\neq 0 \\ \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=6+3=9\neq 0 \\ \begin{vmatrix} -2 & -3 & 2 \\ 1 & -3 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}=-2-15+6=-11\neq 0 \end{array}\right\} \rightarrow \quad ran(A')=3$$

Los dos primeros menores calculados anteriormente nos indican que ran (A) = 2.

Por lo tanto, ***como ran (A) = 2 y ran (A´)=3*** *deducimos que* ***las rectas r y s se cruzan.***

Para obtener la distancia entre las dos rectas r y s vamos a utilizar el siguiente procedimiento:
Calculamos el plano π que contiene a r y es paralelo a s, por lo tanto de este plano conocemos

$\begin{cases} \text{punto} \quad P_r\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3},0\right) \\ \text{vectores} \quad \begin{cases} \vec{v}_r=(-2\,,1\,,3) \\ \vec{v}_s=(1\,,1\,,1) \end{cases} \end{cases}$ *la ecuación del plano π se obtiene:* $\begin{vmatrix} x-\dfrac{1}{3} & y-\dfrac{1}{3} & z-0 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0 \rightarrow$

$$\left(x-\frac{1}{3}\right)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}-\left(y-\frac{1}{3}\right)\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}+z\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=0 \rightarrow \left(x-\frac{1}{3}\right)(-2)-\left(y-\frac{1}{3}\right)(-5)+z\,(-3)=0 \rightarrow$$

$$-2x+\frac{2}{3}+5y-\frac{5}{3}-3z=0 \rightarrow -2x+5y-3z-1=0 \rightarrow \pi:2x-5y+3z+1=0$$

Finalmente, $d(r,s)=d(P_s,\pi)=\dfrac{|2\,.\,1-5\,.\,2+3\,.\,0+1|}{\sqrt{2^2+(-5)^2+3^2}}=\dfrac{|2-10+1|}{\sqrt{4+25+9}}=\dfrac{7}{\sqrt{38}}=1'135549...$

$$\boxed{\textbf{Solución:}\quad d(r,s)=\frac{7}{\sqrt{38}}\ u.}$$

$$c)\ recta\quad t\ /\ \left\langle \begin{array}{l} pase\ por\left(\dfrac{41}{57},\quad -\dfrac{14}{57},\quad 0\right). \\ t\ \perp\ r\ y\ s \end{array}\right.$$

$$Como\quad t\ \perp\ r\ y\ s\quad \rightarrow\quad \vec{v}_t=\vec{v}_r\ x\ \vec{v}_s=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=$$

$$=\vec{i}\ (1-3)-\vec{j}\ (-2-3)+\vec{k}\ (-2-1)=(-2,5,-3)$$

$$\boxed{La\ ecuación\ parámetrica\ de\ la\ recta\quad t\quad será:\ \left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{41}{57}-2\lambda \\ y=\dfrac{-14}{57}+5\lambda\quad\quad \lambda\in\Re \\ z=-3\lambda \end{array}\right.}$$