Matemáticas II Julio 2014

OPCIÓN A

PROBLEMA A.1. Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) El valor del determinante de la matriz $S=\begin{pmatrix}2 & -2 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ -1 & 3 & 5\end{pmatrix}$, *(2 puntos)* y la matriz S^{-1}, que es la matriz inversa de la matriz *S*. *(2 puntos)*. Indicar la relación entre que el valor del determinante de una matriz *S* sea o no nulo y la propiedad de que esta matriz admita matriz inversa S^{-1}. *(1 punto)*.

b) El determinante de la matriz $\left(4\left(T^2\right)\right)^{-1}$, sabiendo que *T* es una matriz cuadrada de 3 filas y que 20 es el valor del determinante de dicha matriz *T*. *(3 puntos)*.

c) La solución a de la ecuación $\begin{pmatrix}a & a^2-1 & -3\\ a+1 & 2 & a^2+4\\ -3 & 4a & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & a+1 & -3\\ a^2-1 & 2 & 4a\\ -3 & a^2+4 & 1\end{pmatrix}$. *(2 puntos)*.

Solución:

a) Calculamos |S| por la regla de Sarrus,

$$|S|=\begin{vmatrix}2 & -2 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ -1 & 3 & 5\end{vmatrix}=10+3+2+1-6+10=20$$

Como $|S|\neq 0 \;\rightarrow\; \exists\, S^{-1}$

Calculamos S^{-1} *por el método de los adjuntos,*

$$S=\begin{pmatrix}2 & -2 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ -1 & 3 & 5\end{pmatrix}\xrightarrow{menores}\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & 5\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 5\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}-2 & 1\\ 3 & 5\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}2 & 1\\ -1 & 5\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}2 & -2\\ -1 & 3\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}-2 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}2 & -2\\ 1 & 1\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 6 & 4\\ -13 & 11 & 4\\ -3 & 1 & 4\end{pmatrix}\xrightarrow{adjuntos}\begin{pmatrix}2 & -6 & 4\\ 13 & 11 & -4\\ -3 & -1 & 4\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{traspuesta}\begin{pmatrix}2 & 13 & -3\\ -6 & 11 & -1\\ 4 & -4 & 4\end{pmatrix}$$

Finalmente,

$$S^{-1}=\frac{1}{|S|}\begin{pmatrix}2 & 13 & -3\\ -6 & 11 & -1\\ 4 & -4 & 4\end{pmatrix}=\frac{1}{20}\begin{pmatrix}2 & 13 & -3\\ -6 & 11 & -1\\ 4 & -4 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2/20 & 13/20 & -3/20\\ -6/20 & 11/20 & -1/20\\ 4/20 & -4/20 & 4/20\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/10 & 13/20 & -3/20\\ -3/10 & 11/20 & -1/20\\ 1/5 & -1/5 & 1/5\end{pmatrix}$$

Por tanto: $S^{-1} = \begin{pmatrix} 1/10 & 13/20 & -3/20 \\ -3/10 & 11/20 & -1/20 \\ 1/5 & -1/5 & 1/5 \end{pmatrix}$

La relación pedida es: Si S es una matriz cuadrada cuyo determinante es no nulo, entonces admite matriz inversa.

b) Sabemos que T es una matriz 3x3 y que $|T| = 20$, hay que calcular $\left|\left(4\left(T^2\right)\right)^{-1}\right|$

De las propiedades de los determinantes sabemos que $|M\ N| = |M|\,|N|$, que si M es $n \times n$ $|\alpha M| = \alpha^n |M|$ y que $|M^{-1}| = \dfrac{1}{|M|}$. Apliquemos estas propiedades para calcular el determinante pedido,

$$\left|\left(4\left(T^2\right)\right)^{-1}\right| = \frac{1}{\left|4\left(T^2\right)\right|} = \frac{1}{|4\,T\,T|} = \frac{1}{|4\,T|\,|T|} = \frac{1}{4^3|T|\,|T|} = \frac{1}{4^3 .20 .20} = \frac{1}{25600}$$

c) La ecuación matricial planteada da lugar a 9 ecuaciones. Ahora bien, no es necesario escribir las ecuaciones que son identidades, por ejemplo, $a = a$, $-3 = -3$, etc.
Por lo tanto, el sistema a resolver será:

$$\begin{cases} a^2 - 1 = a + 1 \\ a + 1 = a^2 - 1 \\ a^2 + 4 = 4a \\ 4a = a^2 + 4 \end{cases}$$

Como quiera que la primera ecuación es la segunda y lo mismo ocurre con la tercera y cuarta, el sistema queda reducido a:

$$\begin{cases} a^2 - 1 = a + 1 \\ a^2 + 4 = 4a \end{cases}$$

Como es un sistema de dos ecuaciones con una sola incógnita, resolvemos cada una de las ecuaciones y las soluciones del sistema serán aquellas que cumplan ambas ecuaciones.

$$a^2 - 1 = a + 1 \quad \rightarrow \quad a^2 - 1 - a - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad a^2 - a - 2 = 0 \quad \rightarrow$$

$$a = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \,.\, 1 \,.\, (-2)}}{2 \,.\, 1} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \left\langle \begin{array}{l} a_1 = \dfrac{1+3}{2} = \dfrac{4}{2} = 2 \\ a_2 = \dfrac{1-3}{2} = \dfrac{-2}{2} = -1 \end{array} \right.$$

$$a^2 + 4 = 4a \quad \rightarrow \quad a^2 - 4a + 4 = 0 \quad \rightarrow$$

$$a = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \,.\, 1 \,.\, 4}}{2 \,.\, 1} = \frac{4 \pm \sqrt{16-16}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{4 \pm 0}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

La solución que cumple ambas ecuaciones es $a = 2$, esta es la solución del sistema.

Solución: La solución de la ecuación matricial planteada es $a = 2$.