OPCIÓN A

PROBLEMA A.2. Se dan los puntos A = (1 , 5 , 7) y B = (3 , – 1 , – 1). Se pide obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Las ecuaciones de los planos π_1 y π_2 que son perpendiculares a la recta *r* que pasa por los puntos *A* y *B*, sabiendo que el plano π_1 pasa por el punto *A* y el plano π_2 pasa por el punto medio del segmento cuyos extremos son los puntos *A* y *B*. *(4 puntos distribuidos en 2 puntos por cada plano).*

b) La distancia entre los planos π_1 y π_2 . *(2 puntos).*

c) Las ecuaciones de la recta *r* que pasa por los puntos *A* y *B*, (2 *puntos*), y los puntos de la recta *r* que están a distancia 3 del punto $C = (1, 0, 1)$. (2 *puntos*).

Solución:

a) Como los planos pedidos son perpendiculares a la recta r, para hallar las ecuaciones de estos planos necesitamos conocer un vector director de la recta r,

$\vec{v_r} = \overrightarrow{AB} = (3,-1,-1) - (1,5,7) = (2,-6,-8) \approx (1,-3,-4)$

Ecuación de π_1*, considerando que* $\pi_1 \perp r$ y $A \in \pi_1$,

como $\pi_1 \perp r \rightarrow \pi_1 : x - 3y - 4z + D = 0$

como $A \in \pi_1 \rightarrow 1 - 3 \,.\, 5 - 4 \,.\, 7 + D = 0;\ 1 - 15 - 28 + D = 0;\ -42 + D = 0;\ D = 42$

Por tanto, $\boldsymbol{\pi_1}$**:** $\mathbf{x - 3\,y - 4\,z + 42 = 0}$

Ecuación de π_2*, considerando que* $\pi_2 \perp r$ y $PM\left(\overline{AB}\right) \in \pi_2$,

como $\pi_2 \perp r \rightarrow \pi_2 : x - 3y - 4z + D = 0$

calculemos $PM\left(\overline{AB}\right) = \left(\frac{1+3}{2}, \frac{5-1}{2}, \frac{7-1}{2}\right) = (2, 2, 3)$

como $PM\left(\overline{AB}\right) \in \pi_2 \rightarrow 2 - 3 \,.\, 2 - 4 \,.\, 3 + D = 0;\ 2 - 6 - 12 + D = 0;\ -16 + D = 0;\ D = 16$

Por tanto, $\boldsymbol{\pi_2}$**:** $\mathbf{x - 3\,y - 4\,z + 16 = 0}$

b) Como los planos π_1 y π_2 *son perpendiculares a la recta r, son paralelos. Por lo tanto:*

$$d(\pi_1,\pi_2) = d\left(P_{\pi_1},\pi_2\right) = \{\text{como punto del plano } \pi_1 \text{ tomamos el } A = (1,5,7)\} = \frac{|1 - 3.5 - 4.7 + 16|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2 + (-4)^2}} =$$

$$= \frac{|1 - 15 - 28 + 16|}{\sqrt{1 + 9 + 16}} = \frac{|-26|}{\sqrt{26}} = \frac{26}{\sqrt{26}} = \frac{26\sqrt{26}}{\sqrt{26}\,\sqrt{26}} = \frac{26\sqrt{26}}{26} = \sqrt{26}$$

Solución, $d(\pi_1,\pi_2) = \sqrt{26}$ *u.l.*

c) Ecuación de la recta r.

Esta recta pasa por los puntos A y B y en el apartado a) obtuvimos su vector director, luego:

$$r:\begin{cases} Punto \quad A=(1,5,7) \\ vector\ director \quad \overrightarrow{v_r}=(1,-3,-4)\end{cases}$$

Las ecuaciones de la recta r serán:

E. vectorial $\quad r: (x, y, z) = (1, 5, 7) + \lambda(1, -3, -4) \quad \lambda \in \Re$

E. paramétrica

$$r:\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=5-3\lambda \\ z=7-4\lambda \end{cases} \qquad \lambda\in\Re$$

E. continua

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-5}{-3}=\frac{z-7}{-4}$$

Buscamos, ahora, los puntos de la recta r / $d(P_r, C) = 3$

$P_r = (1+\lambda, 5-3\lambda, 7-4\lambda)$ *y* $C = (1, 0, 1)$

$$d(P_r,C)=\sqrt{(1+\lambda-1)^2+(5-3\lambda-0)^2+(7-4\lambda-1)^2}=\sqrt{\lambda^2+(5-3\lambda)^2+(6-4\lambda)^2}=$$

$$=\sqrt{\lambda^2+25-30\lambda+9\lambda^2+36-48\lambda+16\lambda^2}=\sqrt{26\lambda^2-78\lambda+61}$$

Debemos resolver: $\sqrt{26\lambda^2-78\lambda+61}=3$*, elevando al cuadrado ambos miembros de la ecuación,* $26\lambda^2-78\lambda+61=9$; $\quad 26\lambda^2-78\lambda+61-9=0$; $\quad 26\lambda^2-78\lambda+52=0$; *simplificando entre 26,* $\lambda^2-3\lambda+2=0$

$$\rightarrow \quad \lambda=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4.1.2}}{2.1}=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{1}}{2}=\frac{3\pm 1}{2}=\begin{cases}\lambda_1=\dfrac{3+1}{2}=\dfrac{4}{2}=2\\ \lambda_2=\dfrac{3-1}{2}=\dfrac{2}{2}=1\end{cases}$$

Como hemos resuelto una ecuación irracional, comprobamos las soluciones.

$\lambda=1 \rightarrow \sqrt{26.1^2-78.1+61}=3$	$\lambda=2 \rightarrow \sqrt{26.2^2-78.2+61}=3$
$\sqrt{26-78+61}=3$	$\sqrt{104-156+61}=3$
$\sqrt{87-78}=3$	$\sqrt{165-156}=3$
$\sqrt{9}=3$ *Sí*	$\sqrt{9}=3$ *Sí*

Para $\lambda = 1$, $P_r = (1+1, 5-3.1, 7-4.1) = (2, 2, 3)$

Para $\lambda = 2$, $P_r = (1+2, 5-3.2, 7-4.2) = (3, -1, -1)$

Finalmente, los puntos de r que distan 3 unidades de C son: (2 , 2 , 3) y (3 , – 1 , – 1).