OPCIÓN B

PROBLEMA B.1. Se da el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases}(1-\alpha)\,x+2\,y+z=4\\ x+y-2\,z=-4\\ x+4\,y-(\alpha+1)\,z=-2\alpha\end{cases}$, donde α es un parámetro real.

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Los valores del parámetro α para los que el sistema es incompatible. *(3 puntos).*

b) Los valores del parámetro α para los que el sistema es compatible y determinado. *(3 puntos).*

c) Todas las soluciones del sistema cuando $\alpha = 2$. *(4 puntos).*

Solución:

La matriz ampliada, A´, de este sistema es $\left(\begin{array}{ccc|c} 1-\alpha & 2 & 1 & 4\\ 1 & 1 & -2 & -4\\ 1 & 4 & -(\alpha+1) & -2\alpha\end{array}\right)$

La matriz de coeficientes, A, es 3x3 por lo que su máximo rango posible será 3.
A´ es 3x4 por lo que su máximo rango posible será 3.

Empezamos estudiando el rango de A,

$$|1| = 1 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran(A) \geq 1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1\\ 1 & 4\end{vmatrix} = 4-1 = 3 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran(A) \geq 2$$

$$\begin{vmatrix} 1-\alpha & 2 & 1\\ 1 & 1 & -2\\ 1 & 4 & -(\alpha+1)\end{vmatrix} = -(\alpha+1)(1-\alpha)+4-4-1+8(1-\alpha)+2(\alpha+1) = -(1-\alpha^2)-1+8-8\alpha+2\alpha+2 =$$

$$= -1+\alpha^2-1+10-6\alpha = \alpha^2-6\alpha+8$$

$$\alpha^2-6\alpha+8=0 \quad \rightarrow \quad \alpha = \frac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-4.1.8}}{2.1} = \frac{6\pm\sqrt{36-32}}{2} = \frac{6\pm\sqrt{4}}{2} = \frac{6\pm 2}{2} = \begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{8}{2} = 4\\ \alpha_2 = \dfrac{4}{2} = 2\end{cases}$$

Para $\alpha \neq 2$ *y* $\alpha \neq 4$ $\rightarrow$ $|A| \neq 0$ $\rightarrow$ *ran (A) = 3 y como el máximo rango de A´ es 3, obtenemos que ran(A) = ran(A´) = 3 = nº de incógnitas* $\rightarrow$ *Sistema Compatible Determinado*

Para $\alpha = 2$,

$$A´ = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 4\\ 1 & 1 & -2 & -4\\ 1 & 4 & -3 & -4\end{array}\right) \quad y \ \ sabemos\ que \ \ |A| = 0 \ \ y \ \ que \ \ ran\,(A) = 2.$$

Calculemos el rango de A´, añadiendo al menor de orden 2 no nulo la 1ª fila y la 4ª columna:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 4\\ 1 & 1 & -4\\ 1 & 4 & -4\end{vmatrix} \begin{matrix} \\ F_2+F_1\\ F_3+F_1\end{matrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 4\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 6 & 0\end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} 3 & 0\\ 6 & 0\end{vmatrix} = (-1)\,.\,0 = 0 \quad \rightarrow \quad ran\,(A´) = 2$$

Para $\alpha = 2$, *ran (A) = ran (A´) = 2 < nº de incógnitas, el sistema es compatible indeterminado.*

Para α = 4,

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & -4 \\ 1 & 4 & -5 & -8 \end{array}\right)$$

Como hemos hecho en el caso anterior,

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -4 \\ 1 & 4 & -8 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ F_2+F_1 \\ F_3+2F_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 4 \\ -2 & 3 & 0 \\ -5 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -5 & 8 \end{vmatrix} = 4\,.(-16+15) = -4 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran\,(A') = 3$$

Luego ran (A) =2 ≠ 3 = ran (A´). Para α = 4 el sistema es incompatible.

El estudio realizado anteriormente nos facilita la respuesta a cada uno de los apartados.

a) ***El sistema es incompatible para α = 4****.*

b) ***El sistema es compatible y determinado para α ≠ 2 y α ≠ 4, es decir,*** $\alpha \in \Re - \{2,4\}$.

c) Para α = 2 sabemos que el sistema es compatible indeterminado.
Por el estudio realizado anteriormente, el menor de orden 2 no nulo nos indica las ecuaciones e incógnitas principales que son la 2ª y 3ª ecuaciones y las incógnitas x e y. El sistema a resolver es:

$$\begin{cases} x+y=-4+2z \\ x+4y=-4+3z \end{cases}$$ *y podemos resolverlo por Cramer ya que en el estudio inicial obtuvimos* $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 3$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -4+2z & 1 \\ -4+3z & 4 \end{vmatrix}}{3} = \frac{-16+8z+4-3z}{3} = \frac{-12+5z}{3}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -4+2z \\ 1 & -4+3z \end{vmatrix}}{3} = \frac{-4+3z+4-2z}{3} = \frac{z}{3}$$

Para α = 2, la solución del sistema es: $\begin{cases} x = \dfrac{-12+5\lambda}{3} \\ y = \dfrac{\lambda}{3} \\ z = \lambda \end{cases} \qquad \lambda \in \Re$