PROBLEMA B.2. Se dan las rectas $r:\begin{cases} x-y=0 \\ z=10 \end{cases}$ y $s:\begin{cases} x+y=8 \\ x+y+z=13 \end{cases}$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Un vector director de cada recta (2 *puntos*) y la posición relativa de las rectas *r* y *s*. (2 *puntos*).

b) La ecuación del plano que contiene a la recta *s* y es paralelo a la recta *r*. (3 *puntos*).

c) La distancia entre las rectas *r* y *s*. (3 *puntos*).

Solución:

a) ***Vector director de la recta r.***

Podemos obtener el vector director de la recta calculando sus ecuaciones paramétricas:

$$r:\begin{cases} x-y=0 \\ z=10 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=y \\ z=10 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=\lambda \\ y=\lambda \\ z=10 \end{cases} \rightarrow \vec{v_r}=(1\,,1\,,0)$$

Otra forma de obtenerlo, a partir de los vectores perpendiculares de los planos que definen la recta r,

$$r:\begin{cases} x-y=0 & \rightarrow \vec{n_1}=(1,-1,0) \\ z=10 & \rightarrow \vec{n_2}=(0,0,1) \end{cases} \rightarrow \vec{v_r}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=-\vec{i}-\vec{j} \rightarrow \vec{v_r}=(-1,-1,0)\approx(1,1,0)$$

Vector director de la recta $s:\begin{cases} x+y=8 \\ x+y+z=13 \end{cases}$

Del plano $x+y=8 \rightarrow \vec{n_1}=(1,1,0)$

Del plano $x+y+z=13 \rightarrow \vec{n_2}=(1,1,1)$

Luego, $\vec{v_s}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=\vec{i}-\vec{j}=(1\,,-1\,,0)$

Otra forma de obtenerlo,

$\begin{cases} x+y=8 \\ x+y+z=13 \end{cases}$ *Sustituyendo el valor de* $x+y$ *en la segunda ecuación:* $8+z=13;\quad z=5.$

De la 1ª ecuación: $x=8-y$*. Las ecuaciones paramétricas de la recta s serán:* $\begin{cases} x=8-\lambda \\ y=\lambda \\ z=5 \end{cases} \rightarrow$

$\vec{v_s}=(-1,1,0)\approx(1,-1,0)$

Determinemos la posición relativa de las rectas r y s.

Como anteriormente hemos calculado las ecuaciones paramétricas de las dos rectas, de ellas conocemos un punto y su vector director:

$$r:\begin{cases} x=\lambda \\ y=\lambda \\ z=10 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} P_r=(0\,,0\,,10) \\ \vec{v_r}=(1\,,1\,,0) \end{cases} \qquad s:\begin{cases} x=8-\lambda \\ y=\lambda \\ z=5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} P_s=(8\,,0\,,5) \\ \vec{v_s}=(1\,,-1\,,0) \end{cases}$$

Para determinar la posición relativas de las rectas r y s estudiamos rangos en la siguiente matriz ampliada: $\left[\overrightarrow{v_r}\ \ \overrightarrow{v_s}\ \ \overrightarrow{P_rP_s}\ \right]$. $\overrightarrow{P_rP_s} = (8,0,-5)$. *La matriz a estudiar es:*

$$M' = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 8 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{array}\right)$$

Estudiemos el ran(M), M es 3x2 luego su máximo rango es 2,

$$\left.\begin{array}{l} |1| = 1 \neq 0 \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1-1 = -2 \neq 0 \end{array}\right\} \rightarrow \quad ran(M) = 2 \quad \Rightarrow \quad \textit{Las rectas no son paralelas.}$$

Estudiemos el ran(M´), M´ es 3x3 luego su máximo rango es 3; el estudio del rango de M nos indica que $ran(M') \geq 2$,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 5 + 5 = 10 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran(M') = 3 \quad \Rightarrow \quad \textbf{Las rectas r y s se cruzan.}$$

b) Hay que obtener el plano $\pi\ /\ s \subset \pi \quad y \quad \pi // r$.

De las condiciones que debe cumplir el plano π *deducimos que* $P_s \in \pi$ *y los vectores directores de* π *son* $\overrightarrow{v_s}$ *y* $\overrightarrow{v_r}$. *Luego:*

Las ecuaciones paramétricas son: $\pi : \begin{cases} x = 8 + \lambda - \mu \\ y = \quad \lambda + \mu \\ z = 5 \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \Re$ *y la ecuación general* $z = 5$.

c) ¿d(r , s)?

Considerando las condiciones del plano π *obtenido en el apartado anterior, deducimos que* $d(r, s) = d(r, \pi) = (\text{como } \pi // r) = d(P_r, \pi)$.

$P_r = (0,0,10) \quad y \quad \pi : z = 5 \quad \rightarrow \quad \pi : z - 5 = 0$

$$d(P_r, \pi) = \frac{|10-5|}{\sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{5}{1} = 5$$

Por tanto, $\mathbf{d(r, s) = 5}$