PROBLEMA A.1. Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x+3y+z=\alpha \\ x+y-\alpha z=1 \\ 2x+\alpha y-z=2\alpha+3 \end{cases}$, donde α es un parámetro real. Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La solución del sistema cuando $\alpha=-1$. *(3 puntos)*
b) Todas las soluciones del sistema cuando $\alpha=0$. *(3 puntos)*
c) El valor de α para el que el sistema es incompatible. *(4 puntos)*

Solución:

a) ¿Solución para $\alpha=-1$?

Para $\alpha=-1$ el sistema a resolver es:

$\begin{cases} x+3y+z=-1 \\ x+y+z=1 \\ 2x-y-z=1 \end{cases}$ *La matriz ampliada de este sistema es:* $M'=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$

Calculemos el rango de M,

$$\left.\begin{array}{l} 1=1\neq 0 \;\rightarrow\; ran(M)\geq 1 \\ \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=1-3=-2\neq 0 \;\rightarrow\; ran(M)\geq 2 \\ \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix}=-1-1+6-2+1+3=6\neq 0 \end{array}\right\} \rightarrow\; ran(M)=3$$

El último menor de orden 3 estudiado también lo es de M´ y como el máximo rango de M´ es 3 entonces ran(M´) = 3

Luego, ran (M) = ran (M´) = 3 = nº incógnitas → Es un sistema compatible determinado.

Resolvemos el sistema por Cramer,

$$x=\frac{\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{6}=\frac{1-1+3-1-1+3}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{6}=\frac{-1+1-2-2-1-1}{6}=\frac{-6}{6}=-1$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{6}=\frac{1+1+6+2+1-3}{6}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$$

Finalmente, ***para*** $\alpha = -1$ ***la solución del sistema es:*** $\begin{cases} x = \dfrac{2}{3} \\ y = -1 \\ z = \dfrac{4}{3} \end{cases}$

b) Para $\alpha = 0$ *el sistema a resolver es:*

$\begin{cases} x + 3y + z = 0 \\ x + y = 1 \\ 2x - z = 3 \end{cases}$ *La matriz ampliada de este sistema es:* $N' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right)$

Calculemos el rango de N,

$$\left.\begin{array}{l} |1| = 1 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran(N) \geq 1 \\ \\ \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 3 = -2 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran(N) \geq 2 \\ \\ \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 2 + 3 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \quad ran(N) = 2$$

Calculemos el rango de N´,

Considerando el estudio realizado anteriormente ran(N´) ≥ 2*, el menor de orden 3 de N´ por estudiar es:*

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 6 - 9 = 0 \quad \rightarrow \quad ran(N') = 2$$

Luego, ran (N) = 2 = ran (N´) < nº de incógnitas = 3 $\rightarrow$ *Es un sistema compatible indeterminado*

Para resolver el sistema utilizamos las ecuaciones e incógnitas correspondientes al menor de orden 2 no nulo. Es decir, 1ª y 2ª ecuación y como incógnitas x e y.

El sistema a resolver será:

$$\begin{cases} x + 3y = -z \\ x + y = 1 \end{cases} \rightarrow \quad \begin{array}{l} x = \dfrac{\begin{vmatrix} -z & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \dfrac{-z-3}{-2} = \dfrac{3+z}{2} \\ y = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & -z \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \dfrac{1+z}{-2} = \dfrac{-1-z}{2} \end{array} \rightarrow \quad Soluciones: \begin{cases} x = \dfrac{3+\lambda}{2} \\ y = \dfrac{-1-\lambda}{2} \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \Re$$

c) ¿Valores de α *para los que es S.I.?*

$\begin{cases} x + 3y + z = \alpha \\ x + y - \alpha z = 1 \\ 2x + \alpha y - z = 2\alpha + 3 \end{cases}$ *La matriz ampliada de este sistema es:* $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & \alpha \\ 1 & 1 & -\alpha & 1 \\ 2 & \alpha & -1 & 2\alpha + 3 \end{array}\right)$

La matriz de coeficientes, A, es 3 x 3, por tanto el máximo rango de A es 3

La matriz ampliada, A´, es 3 x 4, por tanto el máximo rango de A´ es 3.
Empezamos estudiando la matriz de coeficientes.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \\ 2 & \alpha & -1 \end{vmatrix} = -1 + \alpha - 6\alpha - 2 + \alpha^2 + 3 = \alpha^2 - 5\alpha$$

$$\alpha^2 - 5\alpha = 0 \quad \rightarrow \quad \alpha(\alpha - 5) = 0 \left\langle \begin{array}{l} \alpha = 0 \\ \alpha - 5 = 0 \quad \rightarrow \quad \alpha = 5 \end{array} \right.$$

Por tanto:

- *si* $\alpha \neq 0, 5$ *ran(A) = 3, como ran(A´) ≥ ran(A) y ran(A´) ≤ 3, también ran (A´) = 3; es decir, ran(A) = ran(A´) = 3 = nº de incógnitas → Sistema compatible determinado.*
- *si* $\alpha = 0$*, por el apartado b) sabemos que es Sistema compatible indeterminado.*
- *si* $\alpha = 5$*,*

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -5 & 1 \\ 2 & 5 & -1 & 13 \end{array} \right) \quad \text{y sabemos que } |A| = 0$$

En A, $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 3 = -2 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran(A) = 2$

En A´, $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 13 \end{vmatrix} = 13 + 25 + 6 - 10 - 5 - 39 = -10 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran(A´) = 3$

Por lo tanto, ran(A) = 2 ≠ 3 = ran(A´) → Sistema incompatible

Finalmente, ***el sistema es incompatible para*** $\boldsymbol{\alpha = 5}$***.***