PROBLEMA A.2. Se dan las rectas $r: \dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z}{2}$, $s: \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = -\lambda \\ z = 0 \end{cases}$ y el punto P (0 , 3, – 2).

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Las ecuaciones de la recta que pasa por el punto P y es paralela a la recta r. *(3 puntos)*
b) La ecuación del plano que contiene a la recta r y es paralelo a la recta s. *(4 puntos)*
c) La distancia entre las rectas r y s. *(3 puntos)*

Solución:

a) ¿recta r_1 que pasa por P y es paralela a r?

De r_1 conocemos: $\begin{cases} P(0,3,-2) \\ r_1 // r \rightarrow \overrightarrow{v_{r_1}} // \vec{v}_r \rightarrow \overrightarrow{v_{r_1}}(3,-1,2) \end{cases}$

Las ecuaciones de la recta r_1 serán:

E. vectorial: $r_1: \begin{cases} x = 0+3\lambda \\ y = 3-\lambda \\ z = -2+2\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \Re \quad \rightarrow \quad r_1: \begin{cases} x = 3\lambda \\ y = 3-\lambda \\ z = -2+2\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \Re$

E. continua: $r_1: \dfrac{x}{3} = \dfrac{y-3}{-1} = \dfrac{z+2}{2}$

b) ¿plano π / $r \subset \pi$ y $\pi // s$?

$\pi // s \rightarrow \vec{v}_s$ *será director de π*

$r \subset \pi \rightarrow P_r \in \pi$ y $\vec{v}_r$ *será director de π*

De las ecuaciones de r y s obtenemos, directamente, los elementos necesarios del plano π.

Punto: P_r (– 1 , 1 , 0) y vectores directores: $\vec{v}_r(3,-1,2)$ y $\vec{v}_s(1,-1,0)$. *La ecuación de π será:*

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-1 & z \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$-3z + 2(y-1) + z + 2(x+1) = 0$$
$$-3z + 2y - 2 + z + 2x + 2 = 0$$
$$2x + 2y - 2z = 0$$
$$x + y - z = 0$$

Solución: π: x + y – z = 0

c) ¿d (r ,s)?

Veamos la posición relativa de las rectas r y s.

$r: \begin{cases} P_r(-1,1,0) \\ \vec{v}_r(3,-1,2) \end{cases} \qquad s: \begin{cases} P_s(1,0,0) \\ \vec{v}_s(1,-1,0) \end{cases}$

Construimos la matriz $M' \left[\vec{v}_r \quad \vec{v}_s \quad \overrightarrow{P_rP_s} \right]$. $\qquad \overrightarrow{P_rP_s} = (2,-1,0)$

$$M' = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Rango de M,

$$\left.\begin{array}{l} |3| = 3 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran(M) \geq 1 \\ \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -3 + 1 = -2 \neq 0 \end{array}\right\} \quad \rightarrow \quad ran(M) = 2 \quad \rightarrow \quad r \ y \ s \left\langle \begin{array}{l} se\ cortan \\ o \\ se\ cruzan \end{array}\right.$$

Rango de M´,

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2 + 4 = 2 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran(M´) = 3$$

ran(M´) = 3 ≠ 2 = ran(M) $\rightarrow$ *las rectas r y s se cruzan.*

$$Por\ tanto,\ d(r,s) = \frac{\left|\left[\vec{v_r} \quad \vec{v_s} \quad \overrightarrow{P_rP_s}\right]\right|}{\left|\vec{v_r} \times \vec{v_s}\right|}$$

$$\left[\vec{v_r} \quad \vec{v_s} \quad \overrightarrow{P_rP_s}\right] = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (calculado\ antes) = 2$$

$$\vec{v_r} \times \vec{v_s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -3\vec{k} + 2\vec{j} + \vec{k} + 2\vec{i} = 2\vec{i} + 2\vec{j}2 - 2\vec{k} = (2, 2, -2)$$

$$\left|\vec{v_r} \times \vec{v_s}\right| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$Por\ tanto \quad d(r,s) = \frac{|2|}{2\sqrt{3}} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\ u.l.$$

Solución: $\boldsymbol{d(r, s) = \frac{\sqrt{3}}{3}}$ ***u.l.***