Matemáticas II Julio 2015

OPCIÓN B

PROBLEMA B.1. Se dan las matrices $A=\begin{pmatrix} x & 1 & -1 \\ y & 2 & 3 \\ z & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} x & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Los valores de x para los que la matriz B tiene inversa. *(3 puntos)*

b) El valor del determinante de las matrices A^3 y $\begin{pmatrix} 2x & 5 & -1 \\ 2y & 10 & 3 \\ 2z & 5 & 0 \end{pmatrix}$, sabiendo que el valor del determinante de la matriz A es 8. *(4 puntos)*

c) Los valores de x, y, z para los cuales $A^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 3 & 7 & 6 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. *(3 puntos)*

Solución:

a) ¿x? / $\exists B^{-1}$,

Para que exista B^{-1} debe ser $|B| \neq 0$.

$$|B|=\begin{vmatrix} x & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}=-1-3x$$

$$-1-3x=0; \qquad -3x=1; \qquad x=\frac{1}{-3}=\frac{-1}{3}$$

Por lo tanto, para $x \neq \dfrac{-1}{3}$ $\quad \exists B^{-1}$

b) ¿$|A^3|$ si $|A| = 8$?

De las propiedades de los determinantes sabemos que $|M\ N|=|M|\,|N|$, luego

$$|A^3|=|A\ A\ A|=|A|\,|A|\,|A|=|A|^3=8^3=512$$

Solución, ***si $|A| = 8$ entonces $|A^3| = 512$***

$$\begin{vmatrix} 2x & 5 & -1 \\ 2y & 10 & 3 \\ 2z & 5 & 0 \end{vmatrix}=\{sacando\ el\ factor\ 2\ de\ C_1\}=2\begin{vmatrix} x & 5 & -1 \\ y & 10 & 3 \\ z & 5 & 0 \end{vmatrix}=\{sacando\ el\ factor\ 5\ de\ C_2\}=$$

$$=2\,.\,5\begin{vmatrix} x & 1 & -1 \\ y & 2 & 3 \\ z & 1 & 0 \end{vmatrix}==10\begin{vmatrix} x & 1 & -1 \\ y & 2 & 3 \\ z & 1 & 0 \end{vmatrix}=10\,|A|=10\,.\,8=80$$

*Solución, **si** $|A| = 8$ **entonces*** $\begin{vmatrix} 2x & 5 & -1 \\ 2y & 10 & 3 \\ 2z & 5 & 0 \end{vmatrix} = 80$

c) ¿x, y, z? / $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 3 & 7 & 6 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Calculemos A^2,

$$A^2 = \begin{pmatrix} x & 1 & -1 \\ y & 2 & 3 \\ z & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & 1 & -1 \\ y & 2 & 3 \\ z & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2+y-z & x+2-1 & -x+3 \\ xy+2y+3z & y+4+3 & -y+6 \\ zx+y & z+2 & -z+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2+y-z & x+1 & -x+3 \\ xy+2y+3z & y+7 & -y+6 \\ zx+y & z+2 & -z+3 \end{pmatrix}$$

La ecuación matricial a resolver es: $\begin{pmatrix} x^2+y-z & x+1 & -x+3 \\ xy+2y+3z & y+7 & -y+6 \\ zx+y & z+2 & -z+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 3 & 7 & 6 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Por tanto, el sistema a resolver será:

$$\begin{cases} x^2+y-z=0 \\ x+1=0 \\ -x+3=4 \\ xy+2y+3z=3 \\ y+7=7 \\ -y+6=6 \\ zx+y=-1 \\ z+2=3 \\ -z+3=2 \end{cases} \quad \text{Efectuando operaciones:} \quad \begin{cases} x^2+y-z=0 \\ x=-1 \\ x=-1 \\ xy+2y+3z=3 \\ y=0 \\ y=0 \\ zx+y=-1 \\ z=1 \\ z=1 \end{cases}$$

Comprobemos que los valores de x, y, z obtenidos cumplen las tres ecuaciones que quedan,

¿ $x^2 + y - z = 0$?

$(-1)^2 + 0 - 1 = 1 - 1 = 0$, *se cumple.*

¿ $x\,y + 2\,y + 3\,z = 3$?

$(-1) \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 = 3$, *se cumple.*

¿ $z\,x + y = -1$?

$1 \cdot (-1) + 0 = -1$, *se cumple.*

***Solución:* $x = -1$, $y = 0$, $z = 1$**