PROBLEMA A.1. Se da el sistema $\begin{cases} x+\ y+2\,z=\ 2 \\ -3x+2y+3\,z\ =-2 \\ 2x+\alpha\,y-5z\ =-4 \end{cases}$, donde α es un parámetro real.

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La solución del sistema cuando $\alpha=0$. *(3 puntos)*

b) El valor de α para el que el sistema es incompatible. *(3 puntos)*

c) Los valores del parámetro para los que el sistema es compatible y determinado *(2 puntos)*

y obtener la solución del sistema en función del parámetro α. *(2 puntos)*

Solución:

Estudiemos el sistema. La matriz ampliada del sistema es:

$$A'=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -3 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & \alpha & -5 & -4 \end{array}\right)$$

A es 3x3, máximo rango de A es 3.

A´ es 3x4, máximo rango de A´es 3

Empezamos estudiando el rango de A,

$$|1|=1\neq 0 \quad\rightarrow\quad ran(A)\geq 1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 3 \end{vmatrix}=3+6=9\neq 0 \quad\rightarrow\quad ran(A)\geq 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 3 \\ 2 & \alpha & -5 \end{vmatrix}=-10-6\alpha+6-8-3\alpha-15=-9\alpha-27$$

$$-9\alpha-27=0 \quad\rightarrow\quad -9\alpha=27 \quad\rightarrow\quad \alpha=\frac{27}{-9}=-3$$

Por tanto, para $\alpha\neq -3 \rightarrow$ *ran(A) = 3 y como el máximo rango de A´ es 3* $\rightarrow$ *ran(A´) = 3*

Para $\alpha=-3 \rightarrow$ *ran(A) = 2, veamos que ocurre con el rango de A´.*

Falta por calcular el menor de orden 3 de A´ que se obtiene a partir del menor de orden 2 anterior no nulo,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & -2 \\ 2 & -5 & -4 \end{vmatrix} = \begin{matrix} \\ F_2+F_1 \\ F_3+2F_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}=2\,(2-20)=-36\neq 0 \quad\rightarrow\quad ran(A')=3$$

Luego,

para $\alpha\neq -3 \rightarrow$ *ran(A) = ran(A´) = 3 = nº de incógnitas* $\rightarrow$ *Sistema Compatible Determinado.*

para $\alpha=-3 \rightarrow$ *ran(A) = 2 ≠3 = ran(A´)* $\rightarrow$ *Sistema Incompatible.*

Resolvamos cada uno de los apartados.

a) ¿Solución para $\alpha=0$*?*

$\alpha=0\neq -3 \rightarrow$ *el sistema es compatible y determinado.*

El sistema a resolver es: $\begin{cases} x+\ y+2\,z=\ 2 \\ -3x+2y+3\,z\ =-2 \\ 2x\qquad -5z\ =-4 \end{cases}$ $\quad |A|=-9\alpha-27\big|_{\alpha=0}=-27$

Resolvemos el sistema por Cramer,

$$x=\frac{\begin{vmatrix}2 & 1 & 2\\ -2 & 2 & 3\\ -4 & 0 & -5\end{vmatrix}}{-27}=\frac{-20-12+16-10}{-27}=\frac{-26}{-27}=\frac{26}{27}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 2 & 2\\ -3 & -2 & 3\\ 2 & -4 & -5\end{vmatrix}}{-27}=\frac{10+24+12+8+12-30}{-27}=\frac{36}{-27}=\frac{-4}{3}$$

$$z==\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ -3 & 2 & -2\\ 2 & 0 & -4\end{vmatrix}}{-27}=\frac{-8-4-8-12}{-27}=\frac{-32}{-27}=\frac{32}{27}$$

Finalmente, ***para*** $\boldsymbol{\alpha = 0}$ ***la solución del sistema es:*** $\begin{cases} x=\dfrac{26}{27}\\ y=\dfrac{-4}{3}\\ z=\dfrac{32}{27}\end{cases}$

b) Según lo estudiado al principio, ***el sistema es incompatible para*** $\boldsymbol{\alpha = -3}$***.***

c) Según lo estudiado inicialmente, el sistema es compatible y determinado para $\alpha \neq -3$

El sistema a resolver es: $\begin{cases} x+\ y+2\ z=\ 2\\ -3x+2y+3\ z\ =-2\\ 2x+\alpha\ y-5z\ =-4\end{cases}$ $|A|=-9\alpha-27$

Resolvemos el sistema por Cramer,

$$x=\frac{\begin{vmatrix}2 & 1 & 2\\ -2 & 2 & 3\\ -4 & \alpha & -5\end{vmatrix}}{-9\alpha-27}=\frac{-20-4\alpha-12+16-6\alpha-10}{-9\alpha-27}=\frac{-26-10\alpha}{-9\alpha-27}=\frac{10\alpha+26}{9\alpha+27}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 2 & 2\\ -3 & -2 & 3\\ 2 & -4 & -5\end{vmatrix}}{-9\alpha-27}=(\text{obtenido en a}))=\frac{36}{-9\alpha-27}=\frac{36}{-9(\alpha+3)}=\frac{-4}{\alpha+3}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ -3 & 2 & -2\\ 2 & 0 & -4\end{vmatrix}}{-9\alpha-27}=\frac{-8-6\alpha-4-8+2\alpha-12}{-9\alpha-27}=\frac{-32-4\alpha}{-9\alpha-27}=\frac{4\alpha+32}{9\alpha+27}$$

Finalmente, ***para*** $\boldsymbol{\alpha \neq -3}$ ***la solución del sistema es:***

$$\begin{cases} x = \dfrac{10\alpha + 26}{9\alpha + 27} \\ y = \dfrac{-4}{\alpha + 3} \\ z = \dfrac{4\alpha + 32}{9\alpha + 27} \end{cases}$$