PROBLEMA A.2. Se dan los puntos $A = (0,0,1)$, $B = (1,0,-1)$, $C = (0,1,-2)$ y $D = (1,2,0)$. Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La ecuación del plano π que contiene a los puntos *A, B y C*. *(3 puntos)*

b) La justificación de que los cuatro puntos *A, B, C y D,* no son coplanarios. *(2 puntos)*

c) La distancia del punto D al plano π, *(2 puntos)*
y el volumen del tetraedro cuyos vértices son *A, B, C y D*. *(3 puntos)*

Solución:

a) ¿plano π que contiene los puntos A, B y C?

$$\text{Del plano } \pi \text{ conocemos } \begin{cases} \text{punto } A(0,0,1) \\ \text{vectores directores } \begin{cases} \overrightarrow{AB}(1,0,-2) \\ \overrightarrow{AC}(0,1,-3) \end{cases} \end{cases}$$

La ecuación del plano π será:

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow z-1+2x+3y=0 \rightarrow 2x+3y+z-1=0$$

Por tanto, la ecuación del plano $\boldsymbol{\pi: 2x + 3y + z - 1 = 0}$

b) Justificar que los puntos A, B, C y D no son coplanarios.

Veamos que el punto D no pertenece al plano π.

$2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 0 - 1 = 0$

$2 + 6 - 1 = 0$

$7 = 0$ *Falso*

El punto D no pertenece al plano π, al que pertenecen los puntos A, B y C.
Por lo que ***los puntos A, B, C y D no son coplanarios.***

c) ¿d (D, π)?

$$d(D,\pi) = \frac{|2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 0 - 1|}{\sqrt{2^2+3^2+1^2}} = \frac{|7|}{\sqrt{14}} = \frac{7}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{14}}{2} \text{ u.l.} \cong 1'8708 \text{ u.l.}$$

El volumen del tetraedro de vértices A, B, C y D podemos obtenerlo de dos formas:

i) Mediante la fórmula: $V_{tetraedro} = \frac{1}{6} \left| \left[\overrightarrow{AD}\ \overrightarrow{BD}\ \overrightarrow{CD} \right] \right|$

$$\left.\begin{aligned} \overrightarrow{AD} &= (1,2,-1) \\ \overrightarrow{BD} &= (0,2,1) \\ \overrightarrow{CD} &= (1,1,2) \end{aligned}\right\} \quad V_{tetraedro} = \frac{1}{6} \left| \left[\overrightarrow{AD}\ \overrightarrow{BD}\ \overrightarrow{CD} \right] \right| = \frac{1}{6} \left\| \begin{matrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{6} |4+2+2-1| = \frac{1}{6} 7 = \frac{7}{6} u^3$$

ii) Podemos considerar como base del tetraedro el triángulo de vértices A, B y C que está sobre el plano π, y la altura del tetraedro es d (D, π).

El área del triángulo de vértices A, B y C la calculamos mediante la fórmula:

$$\acute{A}rea_T = \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right|$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \vec{k} + 2\,\vec{i} + 3\,\vec{j} = 2\,\vec{i} + 3\,\vec{j} + \vec{k} = (2,3,1)$$

$$\left| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{4 + 9 + 1} = \sqrt{14}$$

$$\acute{A}rea_T = \frac{1}{2}\sqrt{14} = \frac{\sqrt{14}}{2}$$

$$V_{tetraedro} = \frac{1}{3}\,\acute{A}rea_T\ .\ h = \frac{1}{3}\,\acute{A}rea_T \cdot d(D,\pi) = \frac{1}{3}\,\frac{\sqrt{14}}{2}\,\frac{\sqrt{14}}{2} = \frac{14}{12} = \frac{7}{6}\,u^3$$

Solución: El área de tetraedro pedido es 7/6 u^3.