PROBLEMA B.1. Se dan las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 2\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$ e $I=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

Obtener **<u>razonadamente</u>**, **<u>escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado</u>**:

a) El determinante de las matrices $A\cdot\left(2(B)^2\right)$ $(1{,}5\ puntos)$ y $A\cdot\left(2(B)^2\right)\cdot(3A)^{-1}$ $(1{,}5\ puntos)$

b) Las matrices A^{-1} $(2\ puntos)$ y $\left((B\cdot A)^{-1}\cdot B\right)^{-1}$ $(2\ puntos)$

c) La solución de la ecuación matricial $A\,.\,X+B\,.\,X=3\,I.$ *(3 puntos)*

Solución:

En la resolución del problema utilizaremos las siguientes propiedades de los determinantes:

$$|A\,.\,B|=|A|\,|B|,\qquad |A^n|=|A|^n,\qquad |A^{-1}|=\frac{1}{|A|},\qquad |n\,A|=\{por\ ser\ A\ 3x3\}=n^3\,|A|$$

a) Calculemos, en primer lugar, $|A|$ *y* $|B|$

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=\{F_2-F_1\}=\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1-2=-1;\qquad |B|=\begin{vmatrix}0 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 2\\ 1 & 0 & -1\end{vmatrix}=2+1+2=5$$

$$\left|A\cdot\left(2(B)^2\right)\right|=|A|\left|2(B)^2\right|=|A|\left|2\,B^2\right|=|A|\,2^3\left|B^2\right|=|A|\cdot 8\cdot|B|^2=-1\cdot 8\cdot 5^2=-200$$

$$\left|A\cdot\left(2(B)^2\right)\cdot(3A)^{-1}\right|=\left|A\cdot\left(2(B)^2\right)\right|\left|(3A)^{-1}\right|=-200\cdot\left|(3A)^{-1}\right|=-200\cdot\frac{1}{|3\,A|}=-200\cdot\frac{1}{3^3|A|}=$$

$$=-200\cdot\frac{1}{27\,(-1)}=\frac{200}{27}$$

b) Para que exista A^{-1} *debe ser* $|A|\neq 0$*, como hemos calculado en el apartado anterior* $|A|=-1\neq 0$*.*
Calculemos A^{-1}

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{menores}\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{adjuntos}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -2 & 1 & -1\\ 3 & -2 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{traspuesta}$$

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ -1 & 1 & -2\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\rightarrow A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ -1 & 1 & -2\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{-1}\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ -1 & 1 & -2\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -3\\ 1 & -1 & 2\\ -1 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

Luego, $A^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -3\\ 1 & -1 & 2\\ -1 & 1 & -1\end{pmatrix}$

Para el obtener la siguiente matriz aplicamos la siguiente propiedad $(A\cdot B)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}$

$$\left((B\cdot A)^{-1}\cdot B\right)^{-1}=B^{-1}\left((B\cdot A)^{-1}\right)^{-1}=B^{-1}\,(B\cdot A)=B^{-1}\cdot B\cdot A=I\cdot A=A$$

c) ¿X? / A . X + B . X = 3 I .

A . X + B . X = 3 I,

(A + B) X = 3 I, si existe (A + B)$^{-1}$ entonces multiplicando por la derecha por ella,

(A + B)$^{-1}$ (A + B) X = (A + B)$^{-1}$ 3 I

I X = (A + B)$^{-1}$ 3 I

X = (A + B)$^{-1}$ 3 I

Comprobemos que existe (A + B)$^{-1}$

$$A+B=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&2&1\\0&1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1&-1\\2&1&2\\1&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&-2\\3&3&3\\1&1&0\end{pmatrix}$$

$$|A+B|=\begin{vmatrix}1&2&-2\\3&3&3\\1&1&0\end{vmatrix}=-6+6+6-3=3\neq 0\quad\Rightarrow\quad\exists\,(A+B)^{-1}$$

Calculemos (A + B)$^{-1}$,

$$A+B=\begin{pmatrix}1&2&-2\\3&3&3\\1&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{menores}\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}3&3\\1&0\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}3&3\\1&0\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}3&3\\1&1\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}2&-2\\1&0\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}1&-2\\1&0\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}1&2\\1&1\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}2&-2\\3&3\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}1&-2\\3&3\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}1&2\\3&3\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&-3&0\\2&2&-1\\12&9&-3\end{pmatrix}\xrightarrow{adjuntos}$$

$$\begin{pmatrix}-3&3&0\\-2&2&1\\12&-9&-3\end{pmatrix}\xrightarrow{traspuesta}\begin{pmatrix}-3&-2&12\\3&2&-9\\0&1&-3\end{pmatrix}\rightarrow\;(A+B)^{-1}=\frac{1}{|A+B|}\begin{pmatrix}-3&-2&12\\3&2&-9\\0&1&-3\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-3&-2&12\\3&2&-9\\0&1&-3\end{pmatrix}$$

Finalmente,

$$X=3(A+B)^{-1}=3\,\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-3&-2&12\\3&2&-9\\0&1&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&-2&12\\3&2&-9\\0&1&-3\end{pmatrix}$$

Solución: $X=\begin{pmatrix}-3&-2&12\\3&2&-9\\0&1&-3\end{pmatrix}$