PROBLEMA B.2. Se dan los planos π: $x + y + z = 1$ y σ: $a x + b y + z = 0$, donde a y b son dos parámetros reales.
Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Los valores de a y b para los que el plano σ pasa por el punto (1,2,3) y, además dicho plano σ es perpendicular al plano π. *(3 puntos)*

b) Los valores de a y b para los cuales sucede que el plano σ pasa por el punto (0,1,1) y la distancia del punto (1,0,1) al plano σ es 1. *(3 puntos)*

c) Los valores de a y b para los que la intersección de los planos π y σ es la recta r para la que el vector (3,2,-5) es un vector director de dicha recta r, *(3 puntos)*
Y obtener las coordenadas de un punto cualquiera de la recta r. *(1 punto)*

Solución:

a) ¿a, b? / $(1,2,3) \in \sigma$ y $\sigma \perp \pi$.

$(1,2,3) \in \sigma \ \rightarrow\ a \cdot 1 + b \cdot 2 + 3 = 0 \ \rightarrow\ a + 2b + 3 = 0$

$\sigma \perp \pi \ \rightarrow\ \vec{n}_\sigma \perp \vec{n}_\pi \ \rightarrow\ (a, b, 1) \perp (1, 1, 1) \ \rightarrow\ (a, b, 1) \cdot (1, 1, 1) = 0 \ \rightarrow\ a + b + 1 = 0$

Resolvamos el sistema: $\begin{cases} a + 2b + 3 = 0 \\ a + b + 1 = 0 \end{cases}$

Restando $1^a - 2^a$, $b + 2 = 0$; $b = -2$

Sustituyendo el valor de b *en, por ejemplo, la* 2^a *ecuación:* $a + (-2) + 1 = 0$; $a - 1 = 0$; $a = 1$

Solución: $\boldsymbol{a = 1}$ **y** $\boldsymbol{b = -2}$

b) ¿a, b? / $(0,1,1) \in \sigma$ y $d((1,0,1), \sigma) = 1$

$(0,1,1) \in \sigma \ \rightarrow\ a \cdot 0 + b \cdot 1 + 1 = 0 \ \rightarrow\ b + 1 = 0 \ \rightarrow\ b = -1$

$$d\left((1,0,1),\sigma\right) = 1 \ \rightarrow\ \frac{|a \cdot 1 + b \cdot 0 + 1|}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1^2}} = 1 \ \rightarrow\ \frac{|a+1|}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}} = 1$$

$$\text{como } b = -1 \ \rightarrow\ \frac{|a+1|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2 + 1}} = 1 \ \rightarrow\ \frac{|a+1|}{\sqrt{a^2+2}} = 1 \ \rightarrow\ |a+1| = \sqrt{a^2+2} \ \ \begin{cases} a + 1 = \sqrt{a^2+2} \\ a + 1 = -\sqrt{a^2+2} \end{cases}$$

1^a *ecuación,*

$$a + 1 = \sqrt{a^2+2} \ \rightarrow\ (a+1)^2 = \left(\sqrt{a^2+2}\right)^2 \ \rightarrow\ a^2 + 2a + 1 = a^2 + 2 \ \rightarrow\ 2a = 1 \ \rightarrow\ a = \frac{1}{2}$$

$$\text{Comprobación,} \quad \frac{1}{2} + 1 = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2}; \quad \frac{3}{2} = \sqrt{\frac{1}{4} + 2}; \quad \frac{3}{2} = \sqrt{\frac{9}{4}} \quad \text{Sí}$$

2^a *ecuación,*

$$a + 1 = -\sqrt{a^2+2} \ \rightarrow\ (a+1)^2 = \left(-\sqrt{a^2+2}\right)^2 \ \rightarrow\ a^2 + 2a + 1 = a^2 + 2 \ \rightarrow\ 2a = 1 \ \rightarrow\ a = \frac{1}{2}$$

$$\text{Comprobación,} \quad \frac{1}{2} + 1 = -\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2}; \quad \frac{3}{2} = -\sqrt{\frac{1}{4} + 2}; \quad \frac{3}{2} = -\sqrt{\frac{9}{4}} \quad \text{No}$$

Solución: $\boldsymbol{a = \frac{1}{2}}$ **y** $\boldsymbol{b = -1}$

c) ¿a, b? / $\pi \cap \sigma = r$ *de forma que* $\vec{v}_r = (3, 2, -5)$

La ecuación de la recta r es: $\begin{cases} x+y+z=1 \\ ax+by+z=0 \end{cases}$

Luego,

$$\vec{v_r}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ a & b & 1 \end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b & 1 \end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & 1 \end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{vmatrix}=(1-b)\,\vec{i}-(1-a)\,\vec{j}+(b-a)\vec{k}=(1-b)\,\vec{i}+(a-1)\,\vec{j}+(b-a)\vec{k}=$$

$$=(1-b\;,a-1\;,b-a)$$

Como los vectores (3 , 2 , – 5) y (1 – b , a – 1, b – a) deben ser directores de la recta r, serán proporcionales. Es decir:

$$\frac{1-b}{3}=\frac{a-1}{2}=\frac{b-a}{-5}=k\neq 0 \quad\rightarrow\quad \begin{cases} 1-b=3k \\ a-1=2k \\ b-a=-5k \end{cases} \quad\rightarrow\quad \begin{cases} b=1-3k \\ a=1+2k \\ b-a=-5k \end{cases}$$

La tercera ecuación se obtiene de las dos primeras:

$b-a=(1-3k)-(1+2k)=1-3k-1-2k=-5k$

El sistema queda reducido a: $\begin{cases} b=1-3k \\ a=1+2k \end{cases} \quad k\neq 0$

Una solución la obtendremos, por ejemplo, para k = 1: $\begin{cases} b=1-3\cdot 1=-2 \\ a=1+2\cdot 1=3 \end{cases}$

Un punto de la recta r lo obtendremos a partir del sistema: $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 3x-2y+z=0 \end{cases}$

Para, por ejemplo, x = 0 $\rightarrow \begin{cases} y+z=1 \\ -2y+z=0 \end{cases} \rightarrow E_1-E_2 \quad\rightarrow\quad 3y=1 \quad\rightarrow\quad y=\frac{1}{3}$

Sustituyendo el valor de y en la primera ecuación:

$$\frac{1}{3}+z=1 \quad\rightarrow\quad z=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

Solución: a = 3 y b = – 2 y $P_r=\left(0\;,\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right).$

Nota: este apartado no queda determinado, tiene infinitas soluciones; depende del valor que le demos a k. La recta r no está determinada ya que sólo conocemos su vector director.