PROBLEMA A.1. Sean A y B dos matrices cuadradas de orden 3 tales que $A^2 = -A - I$ y $2\,B^3 = B$, siendo $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz identidad.

Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La justificación de que la matriz A es invertible *(2 puntos)* y el cálculo de la matriz A^3 en función de A y de I *(2 puntos)*.
b) Los valores posibles del determinante de B. *(3 puntos)*
c) El valor del determinante de la matriz B^2, sabiendo que la matriz B tiene inversa *(2 puntos)*.

Solución:

a) ¿A es invertible?

$A^2 = -A - I$ *(despejando I)* $\rightarrow$ $I = -A^2 - A$ *(sacando factor común A)* $\rightarrow$ $I = A\,(-A - I)$

Por tanto, existe A^{-1} *y* $\boldsymbol{A^{-1} = -A - I}$

Cálculo de A^3,

$A^3 = A^2 \,.\, A = (-A - I)\,A = -A^2 - A = I$ *(según lo obtenido anteriormente)*

Por tanto, $\boldsymbol{A^3 = I}$

En la resolución de los siguientes apartados utilizaremos las siguientes propiedades de los determinantes:

$|A\,.\,B| = |A|\,|B|, \qquad |A^n| = |A|^n, \qquad |n\,A| = \{por\ ser\ A\ 3x3\} = n^3\,|A|$

b) ¿/B/?

Como $B = 2\,B^3 \;\rightarrow\; /B/ = /2\,B^3/ =$ *(como B es 3x3)* $= 2^3\,/\,B^3/ = 8\,/B/^3$

Luego, $/B/ = 8\,/B/^3 \;\rightarrow\; /B/ - 8\,/B/^3 = 0 \;\rightarrow\; /B/\,(\,1 - 8\,/B/^2\,) = 0 \;\rightarrow$

$$\begin{cases} |B| = 0 \\ 1 - 8\,|B|^2 = 0 \;\rightarrow\; 1 = 8\,|B|^2 \;\rightarrow\; \dfrac{1}{8} = |B|^2 \;\rightarrow\; |B| = \pm\sqrt{\dfrac{1}{8}} = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Por tanto, los posibles valores del determinante de B son: $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \quad 0 \quad y \quad \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

c) ¿/B²/? Sabiendo que existe B^{-1}

Como $B = 2\,B^3$ *y como existe* B^{-1}

Multiplicando por la derecha por B^{-1}

$B\,B^{-1} = 2\,B^3\,B^{-1}$

$B\,B^{-1} = 2\,B^2\,B\,B^{-1}$

$I = 2\,B^2\,I$

$I = 2\,B^2$

$|I| = |2\,B^2|$*, como I es la matriz identidad y B es 3x3*

$1 = 8\,|B^2| \;\rightarrow\; |B^2| = \dfrac{1}{8}$

Por tanto, $|B^2| = \dfrac{1}{8}$