PROBLEMA A.2. Se dan la recta $r:\begin{cases} x-2y-2z=1 \\ x+3y-z=1 \end{cases}$ y el plano π*: 2 x + y + m z = n.*

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Los valores de m y n para los que la recta r y el plano π se cortan en un punto. *(3 puntos)*

b) Los valores de m y n para los que la recta r y el plano π no se cortan. *(3´5 puntos)*

c) Los valores de m y n para los que la recta r está contenida en el plano π. *(3´5 puntos)*

Solución:

a) ¿m y n? / $r \cap \pi$ = punto

Para que r y π se corten en un punto, el sistema formado por las ecuaciones de la recta y el plano debe tener solución única (el punto de corte entre r y π), es decir, el sistema debe ser compatible y determinado.

Para que el sistema $r:\begin{cases} x-2y-2z=1 \\ x+3y-z=1 \\ 2x+y+mz=n \end{cases}$ *sea compatible y determinado ran (A) = ran (A´) = 3*

Por tanto, para que ran (A) = 3 debe ser $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & m \end{vmatrix} \neq 0$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & m \end{vmatrix} = 3m-2+4+12+1+2m = 5m+15$$

$$5m+15=0 \quad \to \quad 5m=-15 \quad \to \quad m=\frac{-15}{5}=-3$$

Para $m \neq -3$, ran (A) = 3 y como A´ es 3x4 también ran(A´) = 3

Luego, ***para que la recta r y el plano π se corten en un punto debe ser m ≠ – 3 y n cualquier valor****.*

Otra forma de resolverlo,

Obtengamos las ecuaciones paramétricas de la recta r,

Como $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3+2=5 \neq 0$*, el sistema a resolver es:* $\begin{cases} x-2y=1+2z \\ x+3y=1+z \end{cases}$

Resolviéndolo por Cramer,

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1+2z & -2 \\ 1+z & 3 \end{vmatrix}}{5}=\frac{3+6z+2+2z}{5}=\frac{5+8z}{5}=1+\frac{8}{5}z$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1+2z \\ 1 & 1+z \end{vmatrix}}{5}=\frac{1+z-1-2z}{5}=\frac{-z}{5}$$

Por tanto, $r:\begin{cases} x=1+\frac{8}{5}\lambda \\ y=\frac{-1}{5}\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \qquad \lambda \in \Re$

Sustituyendo los valores de x, y, z de la ecuación de la recta en el plano,

$$2 \cdot \left(1 + \frac{8}{5}\lambda \right) - \frac{1}{5}\lambda + m\,\lambda = n$$

$$2 + \frac{16}{5}\lambda - \frac{1}{5}\lambda + m\,\lambda = n$$

$$\left(\frac{16}{5} - \frac{1}{5} + m \right) \lambda = n - 2$$

$$(3 + m)\,\lambda = n - 2$$

$$\lambda = \frac{n-2}{3+m}$$

Para que haya punto de corte λ debe tener solución, por tanto $3 + m \neq 0$ y $n - 2$ cualquier valor, es decir, $m \neq -3$ y n cualquier valor.

Luego, ***habrá punto de corte entre la recta r y el plano π cuando m ≠ – 3 y n cualquier valor****.*

b) ¿m y n? / r y π no se cortan.

De lo estudiado en el apartado anterior, al resolver el corte entre recta y plano llegamos a la ecuación:

$(3 + m)\,\lambda = n - 2$

Para que no se corten, la ecuación no debe tener solución y para que esto ocurra debe ser:

$3 + m = 0$ y $n - 2 \neq 0$ (para que quede una ecuación de la forma $0 =$ núm $\neq 0$)

Por lo que, $m = -3$ y $n \neq 2$

Por tanto, ***r y π no se cortan para m = – 3 y n ≠ 2****.*

c) ¿m y n? / r $\subset \pi$

Para que la recta r esté contenida en el plano π la ecuación que obtuvimos en el apartado a), $(3 + m)\,\lambda = n - 2$, debe tener infinitas soluciones y para que esto ocurra debe ser:

$3 + m = 0$ y $n - 2 = 0$ (para que quede una ecuación de la forma $0 = 0$)

Por lo que, $m = -3$ y $n = 2$

Por tanto, ***r está contenida en π para m = – 3 y n = 2****.*