PROBLEMA A.3. Se consideran las curvas $y = x^3$, $y = a\,x$ y la función $f(x) = x^3 - a\,x$, siendo a un parámetro real y $a > 0$. Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Los puntos de corte de la curva $y = f(x)$ con los ejes coordenados y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función f. *(1 + 2 puntos)*

b) La gráfica de la función f cuando $a = 9$. *(3 puntos)*

c) Calcular en función del parámetro a, el área de la región acotada del primer cuadrante encerrada entre las curvas $y = x^3$ e $y = a\,x$, cuando $a > 1$. *(2 puntos)*

d) El valor del parámetro a para el que el área obtenida en el apartado c) coincide con el área de la región acotada comprendida entre la curva $y = x^3$, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = 2$. *(2 puntos)*

Solución:

a) Puntos de corte de $y = f(x)$ con los ejes coordenados.

$$x = 0 \;\rightarrow\; y = f(0) = 0^3 - a\,.\,0 = 0 \;\rightarrow\; (0, 0)$$

$$y = 0 \;\rightarrow\; x^3 - a\,x = 0 \;\rightarrow\; x\,(x^2 - a) = 0 \;\rightarrow\; \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - a = 0 \;\rightarrow\; x^2 = a \;\rightarrow\; x = \pm\sqrt{a} \end{cases}$$

$$\left(\text{como } a > 0 \;\rightarrow\; \exists\sqrt{a}\right)$$

Los puntos de corte con los ejes coordenados son (0, 0), $\left(\sqrt{a}, 0\right)$ y $\left(-\sqrt{a}, 0\right)$.

Monotonía.

$y = x^3 - a\,x, \quad a > 0$

$y' = 3\,x^2 - a$

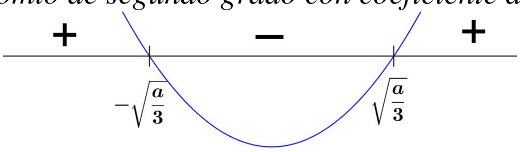
$3\,x^2 - a = 0$

$3\,x^2 = a$

$$x^2 = \frac{a}{3} \;\rightarrow\; x = \pm\sqrt{\frac{a}{3}}, \quad \text{como } a > 0 \;\rightarrow\; \exists\sqrt{\frac{a}{3}}$$

Hay que estudiar el signo de y' en los intervalos:

y' es un polinomio de segundo grado con coeficiente de x^2 positivo, luego



Por tanto, ***la función f es creciente en*** $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{a}{3}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{a}{3}}, +\infty\right)$ ***y decreciente en*** $\left(-\sqrt{\frac{a}{3}}, \sqrt{\frac{a}{3}}\right)$.

b) Gráfica de f para $a = 9$.

Hay que representar la función $y = x^3 - 9\,x$

Dom $y = \mathfrak{R}$, porque es una función polinómica.

Del estudio anterior sabemos:

Puntos de corte con los ejes coordenados: (0, 0), (3, 0) y (– 3, 0).

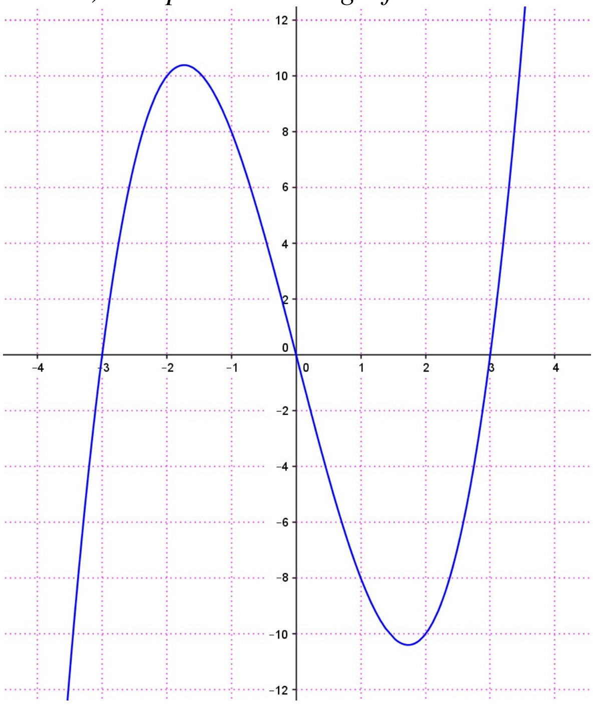
Monotonía: creciente en $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}, +\infty\right)$ y decreciente en $\left(-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right)$.

Extremos: $x = -\sqrt{3} \;\rightarrow\; y = \left(-\sqrt{3}\right)^3 - 9\,.\left(-\sqrt{3}\right) = -3\sqrt{3} + 9\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$

$x = \sqrt{3} \;\rightarrow\; y = \left(\sqrt{3}\right)^3 - 9\,.\left(\sqrt{3}\right) = 3\sqrt{3} - 9\sqrt{3} = -6\sqrt{3}$

luego, en $\left(-\sqrt{3}\,,6\sqrt{3}\right)\approx(-1'73\,,10'39)$ *hay un máximo relativo y en* $\left(\sqrt{3}\,,-6\sqrt{3}\right)\approx(1'73\,,-10'39)$ *hay un mínimo relativo.*

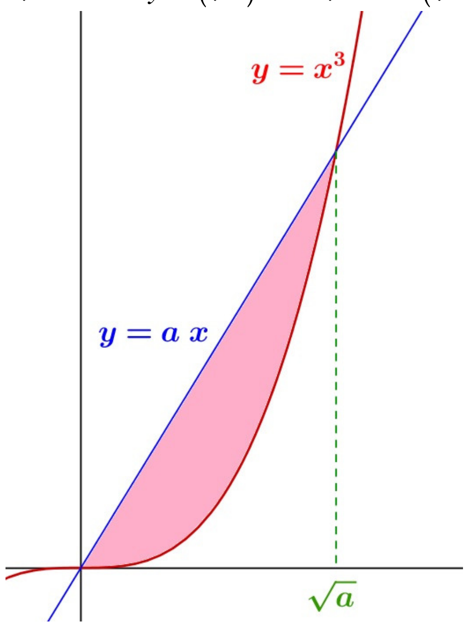
Con esta información, la representación gráfica será:



c) *Área entre* $y = x^3$, $y = a\,x$ ($a > 1$), *en* 1^{er} *cuadrante.*
Calculemos los puntos de corte entre las dos curvas:
$x^3 = a\,x$, *resuelta en el apartado a) "*$x^3 - a\,x = 0$*", las soluciones:* $x = -\sqrt{a}$, $x = 0$ *y* $x = \sqrt{a}$
Como el área a calcular es en el 1^{er} *cuadrante, las soluciones que nos interesan son* $x = 0$ *y* $x = \sqrt{a}$.
Los puntos de corte serán: $x = 0 \;\rightarrow\; y = 0^3 = 0 \;\rightarrow\; (\,0\,,0\,)$

$$x = \sqrt{a} \;\rightarrow\; y = \left(\sqrt{a}\right)^3 = a\sqrt{a} \;\rightarrow \left(\sqrt{a}\,,a\sqrt{a}\right)$$

La representación gráfica es:



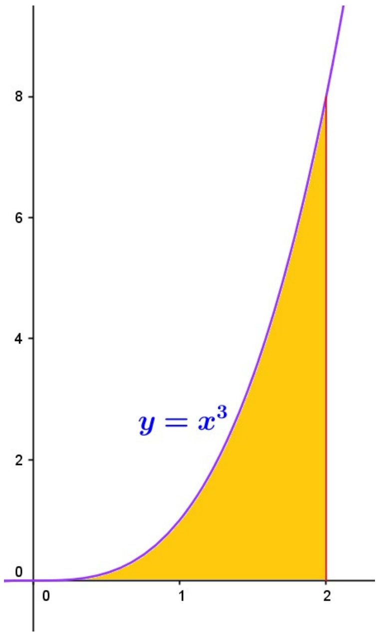
El área pedida la obtenemos mediante la siguiente integral definida,

$$\int_0^{\sqrt{a}} \left(a\,x - x^3\right)dx = \left[a\,\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^{\sqrt{a}} = \left(a\,\frac{\left(\sqrt{a}\right)^2}{2} - \frac{\left(\sqrt{a}\right)^4}{4}\right) - 0 = a\,\frac{a}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4}$$

Finalmente, ***el área de la región pedida es*** $\dfrac{a^2}{4}$ *u.a.*

d) Área entre $y = x^3$, eje OX, $x = 0$ y $x = 2$.

La representación gráfica del área a calcular es:



El área pedida la obtenemos mediante la siguiente integral definida,

$$\int_0^2 x^3\ dx == \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^2 = \frac{2^4}{4} - \frac{0^4}{4} = 4$$

Por tanto, $\frac{a^2}{4} = 4 \quad \rightarrow \quad a^2 = 16 \quad \rightarrow \quad (como\ a > 0) \quad a = 4$

Finalmente, ***el valor del parámetro a buscado es a = 4.***