**PROBLEMA B.1.** Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$ e $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La justificación de que $A$ tiene matriz inversa y el cálculo de dicha inversa $A^{-1}$. *(2 + 2 puntos)*

b) La justificación de que $A^4 = I$. *(2 puntos)*

c) El cálculo de las matrices $A^7$, $A^{30}$ y $A^{100}$. *(4 puntos)*

*Solución:*

*a) Calculemos, en primer lugar,* $|A|$

$$|A|=\begin{vmatrix}0&0&-1\\0&1&0\\1&0&0\end{vmatrix}=1\neq 0 \rightarrow \exists A^{-1}$$

*Calculemos* $A^{-1}$

$$A=\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{menores}\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}1&0\\0&0\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}0&0\\1&0\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}0&-1\\0&0\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}0&-1\\1&0\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}0&0\\1&0\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}0&-1\\1&0\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}0&-1\\0&0\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}0&0\\0&1\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{adjuntos}\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{traspuesta}$$

$$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}\rightarrow A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}=\frac{1}{1}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}$$

*Luego,* $A^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}$

*b) ¿* $A^4 = I$ *?.*

*Calculemos* $A^2$, $A^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$

*Y finalmente,* $A^4=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I$

*Por tanto,* ***hemos comprobado que*** $\boldsymbol{A^4 = I}$.

*c)*

$$A^7 = A^4\ A^3 = I\ A^3 = A^3 = A\ A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

$$A^{30} = \left(A^4\right)^7\ A^2 = I^7\ A^2 = A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{100} = \left(A^4\right)^{25} = I^{25} = I$$

*Por tanto,* $\boldsymbol{A^7 = A^{-1}}$, $\boldsymbol{A^{30} = A^2 =} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ***y*** $\boldsymbol{A^{100} = I}$