PROBLEMA B.2. Se dan la recta $r: \dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y}{a} = \dfrac{z-1}{-1}$ y el plano π: $2x - y + bz = 0$, siendo a y b son dos parámetros reales.

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) El punto de intersección de la recta r y el plano π cuando $a = -b = 1$. *(2´5 puntos)*

b) La distancia entre la recta r y el plano π cuando $a = b = 4$. *(2´5 puntos)*

c) La posición relativa de la recta r y del plano π en función de los valores de los parámetros a y b. *(5 puntos)*

Solución:

a) ¿$r \cap \pi$ para $a = -b = 1$?

Para $a = 1 \rightarrow r: \dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-1}{-1}$, *para* $b = -1 \rightarrow \pi: 2x - y - z = 0$

La ecuación paramétrica de r: $\begin{cases} x = 1 + 4\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \Re$

Sustituyendo los valores de x, y, z en la ecuación del plano:

$2(1 + 4\lambda) - \lambda - (1 - \lambda) = 0; \quad 2 + 8\lambda - \lambda - 1 + \lambda = 0; \quad 8\lambda + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = \dfrac{-1}{8}$

Por tanto, $\begin{cases} x = 1 + 4\dfrac{-1}{8} = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} \\ y = \dfrac{-1}{8} \\ z = 1 - \dfrac{-1}{8} = 1 + \dfrac{1}{8} = \dfrac{9}{8} \end{cases}$

Solución: el punto de corte entre r y π es $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{-1}{8}, \dfrac{9}{8}\right)$.

b) ¿$d(r, \pi)$ para $a = b = 4$?

Para $a = 4 \rightarrow r: \dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y}{4} = \dfrac{z-1}{-1}$, *para* $b = 4 \rightarrow \pi: 2x - y + 4z = 0$

Obtengamos la posición relativa entre r y π.

La ecuación paramétrica de r: $\begin{cases} x = 1 + 4\lambda \\ y = 4\lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \Re$

Sustituyendo los valores de x, y, z en la ecuación del plano:

$2(1 + 4\lambda) - 4\lambda + 4(1 - \lambda) = 0; \quad 2 + 8\lambda - 4\lambda + 4 - 4\lambda = 0; \quad 6 = 0$, #,

por tanto la recta r y el plano π son paralelos.

Entonces $d(r, \pi) = d(P_r, \pi)$, *siendo* P_r *un punto cualquiera de la recta r, por ejemplo* $P_r(1, 0, 1)$.

$$d(P_r, \pi) = \frac{|2 \cdot 1 - 0 + 4 \cdot 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 4^2}} = \frac{|6|}{\sqrt{21}} = \frac{6}{\sqrt{21}} = \frac{2\sqrt{21}}{7}$$

Solución: $d(r, \pi) = \dfrac{2\sqrt{21}}{7}$ ***u.l.***

c) ¿Posición relativa entre r y π en función de a y b?

$$r:\begin{cases} x = 1 + 4\lambda \\ y = a\,\lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \Re \qquad y \qquad \pi : 2x - y + b\,z = 0$$

Sustituyendo los valores de x, y, z en la ecuación del plano:

$2\,(1 + 4\lambda) - a\lambda + b\,(1 - \lambda) = 0$

$2 + 8\lambda - a\lambda + b - b\lambda = 0$

$2 + b + (8 - a - b)\,\lambda = 0$

$(8 - a - b)\,\lambda = -2 - b$

Estudiemos esta ecuación,

Si $8 - a - b = 0$ *y* $-2 - b = 0$ *entonces* $r \subset \pi$

Resolviendo el sistema: $\begin{cases} 8 - a - b = 0 \\ -2 - b = 0 \end{cases}$

De la 2ª ecuación: $\boldsymbol{b = -2}$

Sustituyendo en la 1ª, $8 - a + 2 = 0;$ $\boldsymbol{a = 10}$

Si $8 - a - b = 0$ *y* $-2 - b \neq 0$ *entonces* $r \,//\, \pi$

La 2ª condición, $\boldsymbol{b \neq -2}$

De la 1ª condición, $8 - a = b \rightarrow \boldsymbol{a + b = 8}$

Si $8 - a - b \neq 0$ *y* $(-2 - b)$ *cualquier valor entonces* r *y* π *se cortan*

De la condición, $\boldsymbol{a + b \neq 8}$

Resumiendo lo anterior:

Si $a = 10$ y $b = -2$ la recta r está contenida en el plano π.

Si $b \neq -2$ y $a + b = 8$ la recta r es paralela al plano π.

Si $a + b \neq 8$ la recta r y el plano π se cortan.