PROBLEMA A.1. Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + y = 1 \\ (a-1)y + z = 0 \\ x + a\,y + (a-1)\,z = a \end{cases}$

donde *a* es un parámetro real. Se pide obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Los valores del parámetro a para los cuales el sistema es compatible. *(5 puntos)*
b) Las soluciones del sistema cuando $a = 1$. *(3 puntos)*
c) Las soluciones del sistema cuando $a = 0$. *(4 puntos)*

Solución:
En primer lugar estudiamos el sistema y después responderemos las preguntas.

La matriz ampliada de este sistema es: $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & a-1 & 1 & 0 \\ 1 & a & a-1 & a \end{array}\right)$

A es una matriz 3x3, por tanto el máximo rango de A es 3.
A´ es una matriz 3x4, por tanto el máximo rango de A es 3.
Empezamos estudiando el rango de A

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & a-1 & 1 \\ 1 & a & a-1 \end{vmatrix} = (a-1)^2 + 1 - a = a^2 - 2a + 1 + 1 - a = a^2 - 3a + 2$$

$$a^2 - 3a + 2 = 0 \;\rightarrow\; \text{Por Ruffini,} \quad \begin{array}{c|ccc} & 1 & -3 & 2 \\ 1 & & 1 & -2 \\ \hline & 1 & -2 & \underline{|0} \\ 2 & & 2 & \\ \hline & 1 & \underline{|0} & \end{array} \qquad \text{Soluciones}: \; a = 1 \;\; y \;\; a = 2$$

Entonces,

para a ≠ 1, 2, $|A| \neq 0 \rightarrow$ *ran(A) = 3 y, como el máximo rango de A´ es 3, ran(A´) = 3, por lo que ran(A) = ran(A´) = 3 = nº incógnitas* $\rightarrow$ ***Sistema Compatible Determinado***

para a = 1, $|A| = 0 \rightarrow ran(A) \leq 2$

La matriz ampliada del sistema queda: $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$

Como $F_3 = F_1$, en el estudio del rango de A´ podemos eliminar la fila 3.

Quedaría $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$

Calculemos el rango de A (como A es 2x3, el máximo rango de A será 2),

$$\left.\begin{array}{l} |1| = 1 \neq 0 \;\rightarrow\; ran(A) \geq 1 \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \;\rightarrow\; ran(A) \geq 2 \end{array}\right\} \rightarrow \; ran(A) = 2$$

Como el máximo rango de A´ también sería 2 (A´es 2x4) $\rightarrow$ *ran(A´) = 2*

Por tanto, ran(A) = ran(A´) = 2 < nº de incógnitas $\rightarrow$ ***Sistema Compatible Indeterminado.***

para a = 2 , $/A/ = 0 \rightarrow ran(A) \leq 2$

La matriz ampliada del sistema queda: $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right)$

Calculemos el rango de A, sabemos que /A/ =0 (el máximo rango de A será 2),

$$\left.\begin{array}{l} |1| = 1 \neq 0 \rightarrow ran(A) \geq 1 \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow ran(A) \geq 2 \end{array}\right\} \rightarrow ran(A) = 2$$

Como el máximo rango de A´ también sería 2 (A´es 2x4) $\rightarrow$ *ran(A´) = 2*

Calculemos el rango de A´, añadiendo al menor anterior de orden 2 no nulo la 3ª fila y la 4ª columna de A´,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0 \rightarrow ran(A') = 3$$

Por tanto, ran(A) $\neq$ *ran(A´)* $\rightarrow$ ***Sistema Incompatible.***

Respondamos a las preguntas,

a) ***El sistema es compatible para*** $a \neq 2$.
(para $a \neq 1, 2$ *es compatible determinado y para a = 1 es compatible indeterminado)*

b) Soluciones para a = 1
Según lo estudiado inicialmente, el sistema a resolver está formado por la 1ª y 2ª ecuaciones y como incógnitas principales z e y. Es decir,

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 1 - x \\ z = 0 \end{cases}$$

La solución del sistema es: $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 0 \end{cases} \quad \lambda \in \Re$

c) Soluciones para a = 0
Si a = 0, $a \neq 1, 2$, *el sistema es compatible determinado.*
El sistema a resolver es:

$$\begin{cases} x + y \quad = 1 \\ \quad - y + z = 0 \\ x \quad - z = 0 \end{cases}, \quad |A| = a^2 - 3a + 2 \,\Big|_{a=0} = 2. \quad Por\ Cramer:$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{1}{2} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{1}{2} \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{2} = \frac{1}{2}$$

Para a = 0 la solución del sistema es: x = y = z = ½.