PROBLEMA A.2. Se tienen el plano π: $x - y + z - 3 = 0$, la recta $s:\begin{cases} x-2y=0 \\ z=0 \end{cases}$ y el punto $A = (1, 1, 1)$. Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La recta que pasa por A, corta a la recta s y es paralela al plano π. *(4 puntos)*

b) El plano que pasa por A, es perpendicular al plano π y paralelo a la recta s. *(3 puntos)*

c) Discute si el punto (3,2,1) está en la recta paralela a s que pasa por (5,3,1). *(3 puntos)*

Solución:

a) ¿Recta r? / $A \in r,\ \ r \cap s \neq \varnothing$ *y* $r \,//\, \pi$

Como $r \,//\, \pi \ \rightarrow\ \vec{v_r} \perp \vec{n_\pi}$ $\left(\vec{v_r} \equiv \text{vector director de } r.\ \vec{n_\pi} \equiv \text{vector perpendicular al plano } \pi\right)$

$$\vec{n_\pi} = (1, -1, 1)$$

Como r corta a s, obtengamos un punto cualquiera de la recta s:

$$s:\begin{cases} x-2y=0 \\ z=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=2y \\ z=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=2\lambda \\ y=\lambda \\ z=0 \end{cases} \rightarrow P_s\,(2\lambda, \lambda, 0)$$

$A \in r$ *y* $P_s \in r \ \rightarrow\ \overrightarrow{AP_s}$ *es* $\vec{v_r}$

$\overrightarrow{AP_s} = (2\lambda - 1, \lambda - 1, -1) = \vec{v_r}$

como $\vec{v_r} \perp \vec{n_\pi} \ \rightarrow\ \vec{v_r} \cdot \vec{n_\pi} = 0 \ \rightarrow\ (2\lambda - 1, \lambda - 1, -1) \cdot (1, -1, 1) = 0$

$$2\lambda - 1 - \lambda + 1 - 1 = 0$$
$$\lambda - 1 = 0$$
$$\lambda = 1$$

Para $\lambda = 1$, $P_s\,(2, 1, 0)$ *y* $\vec{v_r} = (1, 0, -1)$. *Por tanto,* ***la ecuación de la recta pedida será:***

Ecuación continua: $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{0} = \dfrac{z-1}{-1}$

Ecuación paramétrica: $\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 \\ z = 1 - \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \Re$

b) ¿Plano σ*? /* $A \in \sigma,\ \ \sigma \perp \pi$ *y* $\sigma \,//\, s$

Para obtener la ecuación del plano σ *necesitamos un punto y dos vectores directores de* σ.

como $A \in \sigma \ \rightarrow\ P_\sigma = A = (1, 1, 1)$

$\sigma \perp \pi \ \rightarrow\ \vec{u_\sigma} = \vec{n_\pi} = (1, -1, 1)$

$\sigma \,//\, s \ \rightarrow\ \vec{v_\sigma} = \vec{v_s} = (2, 1, 0)^{*}$

(a partir de la ecuación paramétrica de la recta s obtenida en el apartado (a))*

Ecuación del plano σ,

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{(desarrollando por la 1}^a\text{ fila)}$$

$$(x-1)\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - (y-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + (z-1)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-1)\,(-1) - (y-1)\,(-2) + (z-1)\,(1+2) = 0$$

$-x + 1 + 2y - 2 + 3z - 3 = 0$

$-x + 2y + 3z - 4 = 0 \quad \rightarrow \quad x - 2y - 3z + 4 = 0$

Solución: plano $\boldsymbol{\sigma : x - 2y - 3z + 4 = 0}$

c) ¿recta t? / (5, 3, 1) ∈ t y t // s.

$$\text{recta} \quad t : \left\langle \begin{array}{l} \text{punto} \quad (5,3,1) \\ \vec{v_t} \left(\text{como } t \,//\, s \ \rightarrow \ \vec{v_t} = \vec{v_s} \right) \ \rightarrow \ \vec{v_t} = (2,1,0) \end{array} \right.$$

$$\text{Por tanto,} \quad t : \begin{cases} x = 5 + 2\lambda \\ y = 3 + \lambda \qquad \lambda \in \Re \\ z = 1 \end{cases}$$

Veamos si el punto (3, 2, 1) ∈ t

$$\begin{cases} 3 = 5 + 2\lambda \\ 2 = 3 + \lambda \\ 1 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2 = 2\lambda \\ -1 = \lambda \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda = -1 \\ \lambda = -1 \end{cases} \qquad \text{Solución} \quad \lambda = -1$$

Por tanto (3, 2, 1) está en la recta paralela a s que pasa por (5,3,1).