PROBLEMA A.3. Consideramos la función $f(x) = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x\cos(\pi x)$, que depende de los parámetros a, b, c. Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La relación entre los coeficientes a, b, c sabiendo que $f(x)$ toma el valor 22 cuando $x = 1$. *(2 puntos)*

b) La relación que deben verificar los coeficientes a, b y c para que sea horizontal la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto P de dicha curva, sabiendo que la abscisa del punto P es $x = 1$. *(4 puntos)*

c) $\int_0^1 x\cos(\pi x)\,dx$ *(4 puntos)*

Solución:

a) Para $x = 1$, $f(1) = 22$.

$22 = a\,.\,1^3 + b\,.\,1^2 + c\,.\,1\,.\,\cos(\pi\,.\,1)$

$22 = a + b + c\,.\,(-1)$

$22 = a + b - c$

Solución: la relación entre los coeficientes es $a + b - c = 22$.

b) P es el punto de $y = f(x)$ cuando $x = 1$; según el apartado anterior P (1, 22).

Para que la tangente a $y = f(x)$ en P sea horizontal, debe ser $y'_{x=1} = 0$

$y' = 3\,a\,x^2 + 2\,b\,x + c\cos(\pi x) + c\,x\,(-sen(\pi x))\,\pi = 3\,a\,x^2 + 2\,b\,x + c\cos(\pi x) - \pi c\,x\,sen(\pi x)$

$y'_{x=1} = 3\,a\,1^2 + 2\,b\,1 + c\cos(\pi\,1) - \pi\,c\,1\,sen(\pi\,1) = 3a + 2b - c$

Solución: la relación entre los coeficientes es $3\,a + 2\,b - c = 0$.

c) $\int_0^1 x\cos(\pi x)\,dx$. *Calculemos* $\int x\cos(\pi x)\,dx$, *la resolvemos por partes,*

$$\int x\cos(\pi x)\,dx = \left\{\begin{array}{l} u = x \quad\rightarrow\quad du = dx \\ dv = \cos(\pi x)\,dx \quad\rightarrow\quad v = \int\cos(\pi x)\,dx = \frac{1}{\pi}\,sen(\pi x)\end{array}\right\} =$$

$$= x\,\frac{1}{\pi}\,sen(\pi x) - \int\frac{1}{\pi}\,sen(\pi x)\,dx = \frac{x\,sen(\pi x)}{\pi} - \frac{1}{\pi}\int sen(\pi x)\,dx =$$

$$= \frac{x\,sen(\pi x)}{\pi} - \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{\pi}\left(-\cos(\pi x)\right)\right] = \frac{x\,sen(\pi x)}{\pi} + \frac{\cos(\pi x)}{\pi^2}$$

Finalmente,

$$\int_0^1 x\cos(\pi x)\,dx = \left[\frac{x\,sen(\pi x)}{\pi} + \frac{\cos(\pi x)}{\pi^2}\right]_0^1 = \left(\frac{1\,.\,sen(\pi\,.\,1)}{\pi} + \frac{\cos(\pi\,.\,1)}{\pi^2}\right) -$$

$$-\left(\frac{0\,.\,sen(\pi\,.\,0)}{\pi} + \frac{\cos(\pi\,.\,0)}{\pi^2}\right) = \left(\frac{1\,.\,0}{\pi} + \frac{-1}{\pi^2}\right) - \left(0 + \frac{1}{\pi^2}\right) == \frac{-1}{\pi^2} - \frac{1}{\pi^2} = -\frac{2}{\pi^2} \approx -0'2026$$

Solución: $\int_0^1 x\cos(\pi x)\,dx = -\frac{2}{\pi^2} \approx -0'2026$