PROBLEMA B.1. Resolver los siguientes apartados, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Dadas A y B, matrices cuadradas del mismo orden tales que $A\,B = A$ y $B\,A = B$, deducir que $A^2 = A$ y $B^2 = B$. *(4 puntos)*

b) Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, se pide encontrar los parámetros a, b para que la matriz $B = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{bmatrix}$, cumpla que $B^2 = B$ pero $A\,B \neq A$ y $B\,A \neq B$ *(2 puntos)*

c) Sabiendo que $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 2 & 1 \\ z & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3$, Obtener razonadamente el valor de los determinantes

$$\begin{vmatrix} 2x & 1 & 0 \\ 2y & 2 & 1 \\ 2z & 3 & 2 \end{vmatrix} \quad y \quad \begin{vmatrix} x+1 & 1 & 0 \\ y+3 & 2 & 1 \\ z+5 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$ *(4 puntos)*

Solución:

a) A y B, matrices cuadradas del mismo orden tales que $A\,B = A$ y $B\,A = B$, ¿$A^2 = A$? y ¿$B^2 = B$?

Consideramos $A\,B = A$ (1) y $B\,A = B$ (2)

$A^2 = A\,A$ = {por (1)} = $(A\,B)\,A$ = {propiedad asociativa} = $A\,(B\,A)$ = {por (2)} = $A\,B$ = {por (1)} = A

Por tanto, $A^2 = A$

$B^2 = B\,B$ = = {por (2)} = $(B\,A)\,B$ = {propiedad asociativa} = $B\,(A\,B)$ = {por (1)} = $B\,A$ = {por (2)} = B

Por tanto, $B^2 = B$

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, ¿$a, b \in \Re$ / $B = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{bmatrix}$ *cumpla* $B^2 = B,\ AB \neq A$ *y* $BA \neq B$?

$$B^2 = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ a+b & b^2 \end{bmatrix}$$

$$Si\ B^2 = B \;\rightarrow\; \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ a+b & b^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{bmatrix} \;\rightarrow\; \begin{cases} a^2 = a \\ b^2 = b \\ a+b = 1 \end{cases}$$

$$a^2 = a \;\rightarrow\; a^2 - a = 0 \;\rightarrow\; a\,(a-1) = 0 \;\rightarrow\; \begin{cases} a = 0 \\ a-1 = 0 \;\rightarrow\; a = 1 \end{cases}$$

$$b^2 = b \;\rightarrow\; b^2 - b = 0 \;\rightarrow\; b\,(b-1) = 0 \;\rightarrow\; \begin{cases} b = 0 \\ b-1 = 0 \;\rightarrow\; b = 1 \end{cases}$$

Como, además, $a + b = 1 \rightarrow \begin{cases} a = 0 \quad y \quad b = 1 \\ o \\ a = 1 \quad y \quad b = 0 \end{cases} \quad (m)$

Como $A\,B \neq A$,

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad a \neq 1$$

Como $B\,A \neq B$,

$$BA = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad b \neq 0$$

De las dos soluciones obtenidas en (m), la que cumple que $a \neq 1$ *y* $b \neq 0$ *es* $a = 0$ *y* $b = 1$.

Solución: los valores de los parámetros buscados son a = 0 y b = 1.

$$c) \quad \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 2 & 1 \\ z & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3,$$

Calculemos:

$$\begin{vmatrix} 2x & 1 & 0 \\ 2y & 2 & 1 \\ 2z & 3 & 2 \end{vmatrix} = \quad \text{El factor 2 que se repite en la } 1^a \text{ columna sale fuera del determinante} \quad = 2\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 2 & 1 \\ z & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 = 6$$

$$\begin{vmatrix} x+1 & 1 & 0 \\ y+3 & 2 & 1 \\ z+5 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \quad \text{Como la } 1^a \text{ columna es suma de dos, el determinante se calcula como suma de dos determinantes} \quad = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 2 & 1 \\ z & 3 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3 + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \quad \text{En el último determinante } C_1 = C_2 + C_3, \text{ por tanto es nulo} \quad = 3 + 0 = 3$$

Por tanto, $\begin{vmatrix} 2x & 1 & 0 \\ 2y & 2 & 1 \\ 2z & 3 & 2 \end{vmatrix} = 6$ *y* $\begin{vmatrix} x+1 & 1 & 0 \\ y+3 & 2 & 1 \\ z+5 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3$