PROBLEMA B.2. Dada la recta $r:\begin{cases} x+y=3 \\ x+4y-z=8 \end{cases}$, se pide obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Las ecuaciones paramétricas de la recta r *(3 puntos)*

b) La ecuación del plano π que es paralelo a r y pasa por los puntos $(5,0,1)$ y $(4,1,0)$ *(4 puntos)*

c) La distancia entre la recta r y el plano π obtenido en el apartado anterior. *(2 puntos)*

Solución:

a) Ecuaciones paramétricas de la recta r.

Debemos resolver el sistema que determina a r.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & -1 & 8 \end{array}\right)$$

$$como \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 4-1=3\neq 0, \quad el\ sistema\ a\ resolver\ es \begin{cases} x+y=3 \\ x+4y=8+z \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} x=\dfrac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 8+z & 4 \end{vmatrix}}{3}=\dfrac{12-8-z}{3}=\dfrac{4-z}{3} \\ y=\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 8+z \end{vmatrix}}{3}=\dfrac{8+z-3}{3}=\dfrac{5+z}{3} \end{array}\right\} \quad Ecuaciones\ paramétricas\ "complicadas"$$

Escogemos otro menor no nulo,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & -1 & 8 \end{array}\right)$$

$$como \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -1\neq 0, \quad el\ sistema\ a\ resolver\ es \begin{cases} y=3-x \\ 4y-z=8-x \end{cases}$$

Sustituyendo el valor de y del la 1ª ecuación en la 2ª,

4 (3 – x) – z = 8 – x, hay que despejar z, 12 – 4 x – z = 8 – x; z = 4 – 3 x

Por tanto, las ecuaciones paramétricas de r son: $\begin{cases} x=\lambda \\ y=3-\lambda \\ z=4-3\lambda \end{cases} \quad \lambda\in\Re$

b) ¿Plano π*? /* $\pi // r$ *y los puntos (5,0,1) y (4,1,0)* $\in \pi$

Para el plano π *necesitamos un punto y dos vectores directores,*

Punto de π *(5,0,1)*

Como $\pi // r \rightarrow \overrightarrow{v_1}=\overrightarrow{v_r}=(1,-1,-3)$*, de las ecuaciones paramétricas de r obtenidas en (a).*

Con los dos puntos del plano π*,* $\overrightarrow{v_2}=(5,0,1)-(4,1,0)=(1,-1,1)$

Ecuación del plano π*,*

$$\begin{vmatrix} x-5 & y-0 & z-1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=0 \quad (desarrollando\ por\ la\ 1^a\ fila)$$

$$(x-5)\begin{vmatrix}-1 & -3\\ -1 & 1\end{vmatrix} - y\begin{vmatrix}1 & -3\\ 1 & 1\end{vmatrix} + (z-1)\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{vmatrix} = 0$$

$$(x-5)\,(-1-3) - y\,(1+3) + (z-1)\,(-1+1) = 0$$

$$-4(x-5) - 4y = 0 \quad \rightarrow \quad -4x + 20 - 4y = 0 \quad \rightarrow \quad x + y - 5 = 0$$

Solución: $\boldsymbol{\pi : x + y - 5 = 0}$

c) ¿d(r,π)?

Como $r \,//\, \pi$ *(según el apartado (b)),* $d(r,\pi) = d(P_r,\pi)$

Pr (0,3,4) (según las ecuaciones paramétricas del la recta r obtenidas en (a))

$$d(P_r,\pi) = \frac{|0+3-5|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

Solución: $\boldsymbol{d(r,\pi) = \sqrt{2}}$ ***u.l.***