PROBLEMA A.2. Se tienen el plano $\pi: 2x + y + 2z = 8$ y el punto $P = (10, 0, 10)$.
Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La distancia del punto P al plano π. *(3 puntos)*

b) El área del triángulo cuyos vértices son los puntos A, B y C, obtenidos al hallar la intersección del plano π con los ejes de coordenadas. *(4 puntos)*

c) El volumen del tetraedro cuyos vértices son P, A, B y C. *(3 puntos)*

Solución:

a) $\pi: 2x + y + 2z = 8$; $\pi: 2x + y + 2z - 8 = 0$ y $P(10, 0, 10)$

$$d(P,\pi) = \frac{|2 \cdot 10 + 0 + 2 \cdot 10 - 8|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{|32|}{3} = \frac{32}{3} \cong 10'6667$$

La distancia del punto P al plano π es de $\frac{32}{3}$ *u.l.* ***(aproximadamente 10´6667 u.l.).***

b) *Calculemos los puntos A, B y C.*

$A = \pi \cap Eje\ OX$

$$Eje\ OX : \left\langle \begin{array}{ll} punto & (0,0,0) \\ \vec{v}\,(1,0,0) & \end{array} \right. \rightarrow Eje\ OX : \begin{cases} x = 0 + 1\lambda \\ y = 0 + 0\lambda & \lambda \in \Re \\ z = 0 + 0\lambda \end{cases} \rightarrow Eje\ OX : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 & \lambda \in \Re \\ z = 0 \end{cases}$$

Sustituyendo los valores de x, y, z del eje en la ecuación del plano, $2\lambda + 0 + 2 \cdot 0 = 8$; $2\lambda = 8$; $\lambda = 4$

Por tanto, $\mathbf{A(4,0,0)}$

$B = \pi \cap Eje\ OY$

$$Eje\ OY : \left\langle \begin{array}{ll} punto & (0,0,0) \\ \vec{v}\,(0,1,0) & \end{array} \right. \rightarrow Eje\ OY : \begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda & \lambda \in \Re \\ z = 0 \end{cases}$$

Sustituyendo los valores de x, y, z del eje en la ecuación del plano, $2 \cdot 0 + \lambda + 2 \cdot 0 = 8$; $\lambda = 8$

Por tanto, $\mathbf{B(0,8,0)}$

$C = \pi \cap Eje\ OZ$

$$Eje\ OZ : \left\langle \begin{array}{ll} punto & (0,0,0) \\ \vec{v}\,(0,0,1) & \end{array} \right. \rightarrow Eje\ Oz : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 & \lambda \in \Re \\ z = \lambda \end{cases}$$

Sustituyendo los valores de x, y, z del eje en la ecuación del plano, $2 \cdot 0 + 0 + 2\lambda = 8$; $2\lambda = 8$; $\lambda = 4$

Por tanto, $\mathbf{C(0,0,4)}$

El área del triángulo de vértices A, B, C la calculamos mediante la fórmula $A_T = \frac{1}{2}\left|\vec{AB} \times \vec{AC}\right|$

$$\vec{AB} = (-4,8,0), \quad \vec{AC} = (-4,0,4), \quad \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 8 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} -4 & 0 \\ -4 & 4 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} -4 & 8 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 32\vec{i} + 16\vec{j} + 32\vec{k} = (32,16,32)$$

$$\left|\vec{AB}\times\vec{AC}\right| = \sqrt{32^2+16^2+32^2} = 48; \qquad A_T = \frac{1}{2}48 = 24\ u.a.$$

El área del triángulo pedida es 24 u.a.

c) Volumen del tetraedro.

Calculamos los vectores $\vec{AP} = (6,0,10)$, $\vec{BP} = (10,8,10)$ *y* $\vec{CP} = (10,0,6)$

$$V_{tetra} = \frac{1}{6}\left\|\begin{matrix} 6 & 0 & 10 \\ 10 & 8 & 10 \\ 10 & 0 & 6 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{6}\left|288-800\right| = \frac{512}{6} = \frac{256}{3} \cong 85´3333$$

El volumen del tetraedro pedido es $\frac{256}{3}$ *u.v.* ***(aproximadamente 85´3333 u.v.).***