PROBLEMA A.3. Se da la función real h definida por $h(x)=\dfrac{x^3+x^2+5x-3}{x^2+2x+5}$

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) El dominio de la función h. Los límites $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$ y $\lim\limits_{x\to 0} h(x)$. *(1 + 2 puntos)*

b) La asíntota de la curva $y = h(x)$. *(4 puntos)*

c) La primitiva de la función h (es decir, $\int h(x)\,dx$) y el área de la superficie encerrada entre las rectas $y = 0$, $x = 1$, $x = 5$ y la curva $y = h(x)$. *(4 puntos)*

Solución:

a) Dominio de h(x)

$$x^2+2x+5=0 \quad\rightarrow\quad x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot 1\cdot 5}}{2\cdot 1}=\frac{-2\pm\sqrt{-16}}{2} \text{ Sin solución}$$

Por tanto, ***Dom h(x) =*** $\mathfrak{R}$

Calculemos los límites,

$$\lim_{x\to+\infty} h(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+x^2+5x-3}{x^2+2x+5}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^2}=\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$$

$$\lim_{x\to 0} h(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x^3+x^2+5x-3}{x^2+2x+5}=\frac{-3}{5}$$

b) Asíntota de $y = h(x)$.

Como Dom h(x) = $\mathfrak{R}$, $y = h(x)$ no tiene asíntota vertical.

Como $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=+\infty$ *y* $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=-\infty$, *$y = h(x)$ no tiene asíntota horizontal*

Obtengamos la asíntota oblicua, (puede ser de dos formas)

1. *La función $h(x)$ es un cociente de dos polinomios tales que grad(num) – grad(den) = 3 – 2 = 1, luego tiene asíntota oblicua. Cálculo de la asíntota (efectuamos la división polinómica),*

$$\begin{array}{rrrr|l} x^3 & +x^2 & +5x & -3 & x^2+2x+5 \\ \hline -x^3 & -2x^2 & -5x & & x-1 \\ & -x^2 & & -3 & \\ & +x^2 & +2x & +5 & \\ \hline & & 2x & +2 & \end{array}$$

Por tanto, ***la asíntota oblicua es y = x – 1***

2. *La asíntota oblicua es $y = mx + n$, siendo*

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{h(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{x^3+x^2+5x-3}{x^2+2x+5}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x^2+5x-3}{x^3+2x^2+5x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^3}=\lim_{x\to+\infty} 1=1$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left[h(x)-m\,x\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^3+x^2+5x-3}{x^2+2x+5}-x\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x^2+5x-3-x^3-2x^2-5x}{x^2+2x+5}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-x^2-3}{x^2+2x+5}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{-x^2}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}(-1)=-1$$

Por tanto, ***la asíntota oblicua es y = x – 1***

c) $\displaystyle\int \frac{x^3+x^2+5x-3}{x^2+2x+5}\,dx=$

Considerando la división polinómica realizada en el apartado anterior,

$$\int\left(x-1+\frac{2x+2}{x^2+2x+5}\right)dx=\frac{x^2}{2}-x+Ln\left|x^2+2x+5\right|+C$$

Calculemos el área de la superficie.

Debemos realizar una representación gráfica del área a calcular.

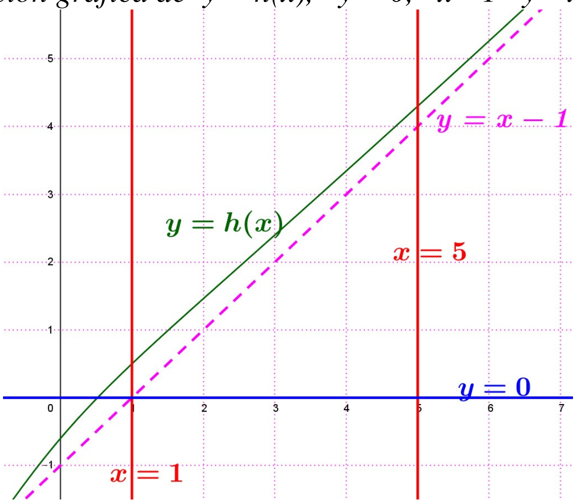
El segundo límite calculado en el apartado a) nos informa que h(x) pasa por $\left(0,-\frac{3}{5}\right)$.

De la función h(x) conocemos su asíntota oblicua $y = x - 1$.

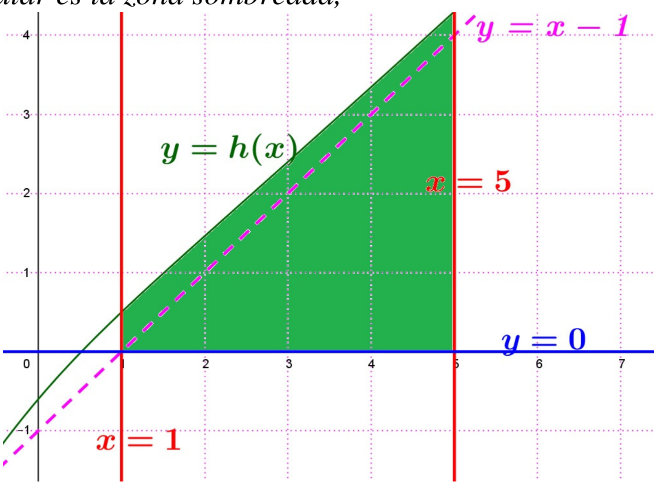
Calculemos,

x	$h(x)$	$x-1$
1	$\frac{1^3+1^2+5\cdot 1-3}{1^2+2\cdot 1+5}=\frac{4}{8}=0{\prime}5$	$1-1=0$
5	$\frac{5^3+5^2+5\cdot 5-3}{5^2+2\cdot 5+5}=\frac{172}{40}=4{\prime}3$	$5-1=4$

La representación gráfica de $y = h(x)$, $y = 0$, $x = 1$ *y* $x = 5$ *es*



El área a calcular es la zona sombreada,



El cálculo del área es mediante la integral definida,

$$\int_1^5 h(x)\,dx=\left[\frac{x^2}{2}-x+Ln\left|x^2+2x+5\right|\right]_1^5=\left(\frac{5^2}{2}-5+Ln\left|5^2+2\cdot 5+5\right|\right)-\left(\frac{1^2}{2}-1+Ln\left|1^2+2\cdot 1+5\right|\right)=$$

$$=\frac{15}{2}+Ln\,40+\frac{1}{2}-Ln\,8=8+Ln\frac{40}{8}=8+Ln\,5$$

El área pedida es de (8 + Ln 5) u.a. (aproximadamente 9´6094 u.a.)