PROBLEMA B.1. Se dan las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$ y $X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Los valores de α para los que la ecuación matricial $A\,X = \alpha\, X$ solo admite una solución. *(4 puntos)*

b) Todas las soluciones de la ecuación matricial $A\,X = 5\,X$. *(3 puntos)*

c) Comprobar que $X=\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ es una solución de la ecuación matricial $A\,X = 2\,X$ y, sin calcular la matriz A^{100}, obtener el valor de β tal que $A^{100}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \beta\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$. *(2 puntos)*

Solución:

a) ¿α? / $A\,X = \alpha X$ solo tiene una solución.

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x+4y=\alpha x \\ -x+6y=\alpha y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (1-\alpha)x+4y=0 \\ -x+(6-\alpha)y=0 \end{cases}$$

Es un sistema homogéneo, tendrá solución única (la trivial $x = y = 0$) cuando $|A| \neq 0$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1-\alpha & 4 \\ -1 & 6-\alpha \end{vmatrix} = (1-\alpha)(6-\alpha)+4 = 6-\alpha-6\alpha+\alpha^2+4 = \alpha^2-7\alpha+10$$

$$\alpha^2-7\alpha+10=0 \rightarrow \alpha = \frac{-(-7)\pm\sqrt{(-7)^2-4\cdot 1\cdot 10}}{2\cdot 1} = \frac{7\pm 3}{2} = \begin{cases} \alpha_1 = \frac{7+3}{2} = 5 \\ \alpha_2 = \frac{7-3}{2} = 2 \end{cases}$$

Por tanto, ***la ecuación matricial $A\,X = \alpha X$ solo admite una solución cuando $\alpha \in \Re \sim \{2, 5\}$.***

b) Soluciones de $A\,X = 5\,X$

Según lo resuelto anteriormente, el sistema que queda es:

$$\begin{cases} (1-5)x+4y=0 \\ -x+(6-5)y=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -4x+4y=0 \\ -x+y=0 \end{cases} \text{ simplificando la primera ecuación por 4, } \begin{cases} -x+y=0 \\ -x+y=0 \end{cases}$$

Como las dos ecuaciones son iguales, la solución es $-x + y = 0;\ \ y = x$

Por tanto, ***la solución es*** $\begin{cases} x=\lambda \\ y=\lambda \end{cases}$ $\lambda \in \Re$**.**

c) ¿$A\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$?

Comprobemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1\cdot 4+4\cdot 1 \\ -1\cdot 4+6\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 4 \\ 2\cdot 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} \quad c.q.c.$$

¿β? / $A^{100}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \beta\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

Sabemos que $A\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$

Calculemos $A^2\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}=A\,A\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}=A\,2\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}=2\,A\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}=2\cdot 2\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}=2^2\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$

Demostremos, por inducción, que $A^n\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}=2^n\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$

De los cálculos anteriores hemos comprobado que se cumple para $n = 1$ *y* $n = 2$*, supongamos que se cumple para* n *y comprobemos que se cumple para* $n+1$

$$A^{n+1}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}=A\,A^n\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}=A\left[A^n\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}\right]=A\left[2^n\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}\right]=2^n\,A\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}=2^n\cdot 2\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}=2^{n+1}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}\qquad c.q.c$$

Por tanto, para $n = 100$, $A^{100}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}=2^{100}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$*; en consecuencia* $\boldsymbol{\beta = 2^{100}}$**.**