PROBLEMA B.2. Se dan en el espacio la recta $r: \dfrac{x-\alpha}{-1} = \dfrac{y}{-4} = \dfrac{z}{\beta}$ y el plano π: $x + 2y + 3z = 6$.

Obtener **<u>razonadamente</u>, <u>escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado</u>**:

a) La posición relativa de la recta r y el plano π en función de los parámetros reales α y β. *(5 puntos)*

b) La distancia entre la recta r y el plano π cuando $\alpha = 6$ y $\beta = 3$. *(4 puntos)*

c) La ecuación del plano que pasa por $(0, 0, 0)$ y que no corta al plano π. *(2 puntos)*

Solución:

a) Posición relativa de r y π en función de α y β.
Podemos resolverlo de dos formas:

1. *Escribimos las ecuaciones paramétricas de la recta r,* $r: \begin{cases} x = \alpha - \lambda \\ y = -4\lambda \\ z = \beta\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \Re$

   Sustituyendo los valores de x, y, z en la ecuación del plano π:
   $(\alpha - \lambda) + 2 \cdot (-4\lambda) + 3\beta\lambda = 6$, *(la incógnita es λ)*
   $\alpha - \lambda - 8\lambda + 3\beta\lambda = 6$
   $\alpha - 9\lambda + 3\beta\lambda = 6$
   $\alpha + (3\beta - 9)\lambda = 6$
   $(3\beta - 9)\lambda = 6 - \alpha \rightarrow \begin{cases} 3\beta - 9 = 0 \rightarrow 3\beta = 9 \rightarrow \beta = 3 \\ 6 - \alpha = 0 \rightarrow \alpha = 6 \end{cases}$

   Si $\beta \neq 3$**, $3\beta - 9 \neq 0$ y por tanto la ecuación tiene como solución $\lambda = \dfrac{6-\alpha}{3\beta - 9}$, luego **r y π se cortan en un punto.
   ***Si $\beta = 3$**, la ecuación queda $0 \cdot \lambda = 6 - \alpha \rightarrow 0 = 6 - \alpha$*
   ***si $\alpha \neq 6$** $\rightarrow 0 = (6 - \alpha) \neq 0$, la ecuación no tiene solución, **r y π son paralelos**.*
   ***si $\alpha = 6$** $\rightarrow 0 = 0$, la ecuación tiene infinitas soluciones, **r está contenida en π**.*

2. *Escribimos la recta r como intersección de dos planos,*

$$r: \frac{x-\alpha}{-1} = \frac{y}{-4} = \frac{z}{\beta} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{x-\alpha}{-1} = \dfrac{y}{-4} \rightarrow \dfrac{x-\alpha}{1} = \dfrac{y}{4} \rightarrow 4x - 4\alpha = y \rightarrow 4x - y = 4\alpha \\ \dfrac{y}{-4} = \dfrac{z}{\beta} \rightarrow \beta y = -4z \rightarrow \beta y + 4z = 0 \end{cases} \rightarrow r: \begin{cases} 4x - y = 4\alpha \\ \beta y + 4z = 0 \end{cases}$$

Estudiamos la posición relativa de r y π estudiando el sistema formado por sus ecuaciones,

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ 4x - y \quad\;\; = 4\alpha \\ \quad\;\; \beta y + 4z = 0 \end{cases} \rightarrow A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 4 & -1 & 0 & 4\alpha \\ 0 & \beta & 4 & 0 \end{array} \right)$$

Estudiamos la posición relativa de r y π estudiando el sistema formado por sus ecuaciones,
A es una matriz 3x3, por tanto el máximo rango de A es 3.
A´ es una matriz 3x4, por tanto el máximo rango de A´ es 3.
Empezamos estudiando el rango de A

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & \beta & 4 \end{vmatrix} = -4 + 12\beta - 32 = 12\beta - 36$$

$$12\beta - 36 = 0 \rightarrow 12\beta = 36 \rightarrow \beta = 3$$

Si $\beta \neq 3$, *ran(A) = 3 = ran(A´) = nº de incógnitas* $\rightarrow$ *sistema compatible determinado* $\rightarrow$ *r y* π *se cortan en un punto.*

Si $\beta = 3$,

La matriz ampliada del sistema será: $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 4 & -1 & 0 & 4\alpha \\ 0 & 3 & 4 & 0 \end{array}\right)$ *y sabemos que* $/A/ = 0$.

Calculemos el rango de A, como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 8 = -9 \neq 0 \rightarrow ran(A) = 2$

Rango de A´,

Falta estudiar el menor $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 4 & -1 & 4\alpha \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 4\alpha \end{vmatrix} = -3\,(4\alpha - 24)$

$$-3\,(4\alpha - 24) = 0 \rightarrow 4\alpha - 24 = 0 \rightarrow 4\alpha = 24 \rightarrow \alpha = 6$$

si $\alpha \neq 6$ $\rightarrow$ *ran(A´) = 3* $\neq$ *2 = ran(A), sistema incompatible, r y* π *son paralelos.*

si $\alpha = 6$ $\rightarrow$ *ran(A´) = ran(A) = 2 < nº incógnitas, sistema compatible indeterminado, r está contenida en* π.

De ambas formas el resultado obtenido es:

Si $\boldsymbol{\beta \neq 3}$, ***r y*** $\boldsymbol{\pi}$ ***se cortan en un punto.***

Si $\boldsymbol{\beta = 3}$ *y* $\boldsymbol{\alpha \neq 6}$ ***r y*** $\boldsymbol{\pi}$ ***son paralelos***.

Si $\boldsymbol{\beta = 3}$ *y* $\boldsymbol{\alpha = 6}$ ***r está contenida en*** $\boldsymbol{\pi}$

b) Según lo estudiado anteriormente para $\alpha = 6$ *y* $\beta = 3$*, la recta r está contenida en el plano* π, *luego* $\boldsymbol{d(r, \pi) = 0}$.

c) ¿Plano σ? / $(0,0,0) \in \sigma$ *y* $\pi \cap \sigma = \varnothing$.

El plano σ *que no corta al plano* π *debe ser paralelo a él, por tanto la ecuación de* σ *será:* $x + 2y + 3z = D$

Como el punto $(0,0,0) \in \sigma \rightarrow 0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = D \rightarrow D = 0$

Y, ***la ecuación del plano pedido es:*** $\boldsymbol{x + 2y + 3z = 0}$.