PROBLEMA 1. Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x+\ y+a\,z=1 \\ x+a\,y+z=1 \\ a\,x+y+z=-2 \end{cases}$, siendo a un parámetro real. **Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) El estudio del sistema en función del parámetro a. *(5 puntos)*
b) Las soluciones del sistema cuando $a = -2$. *(3 puntos)*
c) La solución del sistema cuando $a = 0$. *(2 puntos)*

Solución:
En primer lugar estudiamos el sistema y después responderemos las preguntas.

La matriz ampliada de este sistema es: $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & -2 \end{array}\right)$

A es una matriz 3x3, por tanto el máximo rango de A es 3.
A´ es una matriz 3x4, por tanto el máximo rango de A es 3.
Empezamos estudiando el rango de A

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = a+a+a-a^3-1-1=-a^3+3a-2$$

$-a^3+3a-2=0$

Resolvemos esta ecuación por el método de Ruffini,

$$\begin{array}{c|cccc} & -1 & 0 & 3 & -2 \\ 1 & & -1 & -1 & 2 \\ \hline & -1 & -1 & 2 & \boxed{0} \\ 1 & & -1 & -2 & \\ \hline & -1 & -2 & \boxed{0} & \\ -2 & & 2 & & \\ \hline & -1 & \boxed{0} & & \end{array}$$

Soluciones: $a = -2$ *y* $a = 1$

Para $a \neq -2$ *y* 1

$|A| \neq 0 \rightarrow$ *ran(A) = 3, y como el máximo rango de A´ es 3* $\rightarrow$ *ran(A) = ran(A´) = 3 = nº incógnitas, por lo que el sistema es compatible y determinado.*

Para $a = -2$

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Sabemos que $|A| = 0$, *estudiemos los rangos de A y A´,*

En A, $\left.\begin{array}{l} |1| = 1 \neq 0 \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -2-1=-3\neq 0 \end{array}\right\} \rightarrow ran(A)=2 \quad y \quad ran(A') \geq 2$

En A´, a partir del menor de orden dos no nulo anterior formamos: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \{como\ C_1 = C_2\} = 0 \quad \rightarrow \quad ran(A´) = 2$

Por lo tanto, ran(A) = ran(A´) = 2 < nº incógnitas, luego el sistema es compatible indeterminado.

Obtenemos las soluciones para responder al apartado b).
El sistema a sistema a resolver es el correspondiente a las ecuaciones e incógnitas del menor de orden 2 no nulo. Es decir, el formado por la 1ª y 2ª ecuaciones y como incógnitas principales x e y.

$$\begin{cases} x + y = 1 + 2z \\ x - 2y = 1 - z \end{cases} \rightarrow \quad x = \frac{\begin{vmatrix} 1+2z & 1 \\ 1-z & -2 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-2-4z-1+z}{-3} = \frac{-3-3z}{-3} = 1+z$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1+2z \\ 1 & 1-z \end{vmatrix}}{-3} = \frac{1-z-1-2z}{-3} = \frac{-3z}{-3} = z$$

La solución del sistema: $\begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \qquad \lambda \in \Re$

Para a = 1

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Sabemos que /A / = 0, estudiemos los rangos de A y A´,

En A, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *las tres filas son iguales y* $|1| = 1 \neq 0 \rightarrow$ *ran(A) = 1*

En A´, el menor de orden dos: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 1 = -3 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran(A´) = 2$

Por lo tanto, ran(A) ≠ ran(A´), luego el sistema es incompatible.

Respondamos las cuestiones,
a) ***Si a ≠ – 2 y 1, Sistema Compatible Determinado***
Si a = – 2, Sistema Compatible Indeterminado
Si a = –1, Sistema Incompatible

b) ***Si a = – 2, la solución del sistema es:*** $\begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \qquad \lambda \in \Re$

c) Si a = 0, a ≠ – 2 y 1, el sistema será compatible determinado. Resolvámoslo,

La matriz ampliada de este nuevo sistema sería: $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right)$

$$|A| = \left(-a^3 + 3a - 2\right)\Big|_{a=0} = -0^3 + 3 \cdot 0 - 2 = -2$$

Resolviendo por Cramer,

$$x=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ -2 & 1 & 1\end{vmatrix}}{-2}=\frac{-2-1-1}{-2}=2;\qquad y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & -2 & 1\end{vmatrix}}{-2}=\frac{1+2-1}{-2}=-1;\qquad x=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -2\end{vmatrix}}{-2}=\frac{1-1+2}{-2}=-1$$

Para a = 0, la solución es: $\begin{cases} x=2\\ y=-1\\ z=-1\end{cases}$