PROBLEMA 2. Sea la recta $r: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}$ y los puntos P = (1, 0, 0) y Q = (2, 1, α)

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) El valor de α para que la recta que pasa por P y Q sea paralela a *r*. *(3 puntos)*

b) La ecuación del plano que contiene a P y Q y es paralelo a r, cuando α = 1. *(3 puntos)*

c) La distancia del punto Q al plano que pasa por P y es perpendicular a r, cuando α = 1. *(3 puntos)*

Solución:

a) ¿α? / $r_{PQ} // r$ { r_{PQ} es la recta que pasa por P y Q}

El vector director de r_{PQ} es $\overrightarrow{PQ} = (1,1,\alpha)$

El vector director de r es (1, 1,– 1)

Para que $r_{PQ} // r \;\to\; \overrightarrow{PQ} // \vec{v}_r \;\to\; \frac{1}{1} = \frac{1}{1} = \frac{\alpha}{-1} \;\to\; 1 = \frac{\alpha}{-1} \;\to\; \alpha = -1$

Solución: $\boldsymbol{\alpha = -1}$

b) ¿Plano π? / $\begin{array}{l} P, Q \in \pi \text{ para } \alpha = 1 \;\to\; P(1,0,0) \text{ y } Q(2,1,1) \\ \pi // r \end{array}$

Para obtener la ecuación del plano necesitamos un punto y dos vectores directores de él.

Punto, por ejemplo, P(1,0,0)

Vectores directores, $\left\langle \begin{array}{l} P, Q \in \pi \to \overrightarrow{PQ}\ (1,1,1) \\ \pi // r \to \vec{v}_r\ (1,1,-1) \end{array} \right.$

La ecuación del plano π la obtenemos calculando:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \;\to\; (x-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \;\to\; (x-1)(-2) - y(-2) + z \cdot 0 = 0$$

$$-2x + 2 + 2y = 0 \;\to\; -x + y + 1 = 0 \;\to\; x - y - 1 = 0$$

***Solución:* π: x – y – 1 = 0**

c) ¿d(Q, π)? / $\begin{array}{l} \alpha = 1 \;\to\; P(1,0,0) \text{ y } Q(2,1,1) \\ \pi / \left\{ \begin{array}{l} P \in \pi \\ r \perp \pi \to \vec{v}_r = \vec{n}_\pi; \quad \vec{v}_r = (1,1,-1) \to \vec{n}_\pi = (1,1,-1) \end{array} \right. \end{array}$

Por tanto π: x + y – z + D = 0

Como P∈ π → 1 + 0 – 0 + D = 0 → D = – 1

Por lo que π: x + y – z – 1 = 0

Finalmente, $d(Q,\pi) = \frac{|2+1-1-1|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Solución: $d(Q,\pi) = \frac{\sqrt{3}}{3}$