PROBLEMA 4. Se dan las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ b & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & b & -1 \end{pmatrix}$, que dependen del del parámetro real b.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Los valores de b para que cada una de las matrices AB y BA tenga inversa. *(3 puntos)*

b) Los valores de b para que la matriz $A^T A$ tenga inversa, siendo A^T la matriz traspuesta de A. *(3 puntos)*

c) La inversa de $A^T A$, cuando dicha inversa exista. *(4 puntos)*

Solución:

a) ¿b? / $\exists$ $(AB)^{-1}$ y $(BA)^{-1}$

Calculemos AB,

$$AB=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ b & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & b & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & 2b & 0 \\ -b & 0 & 2b \\ -1 & 2b & -4 \end{pmatrix}$$

$$\exists\,(AB)^{-1} \quad si \quad |AB|\neq 0$$

$$|AB|=\begin{vmatrix} -3 & 2b & 0 \\ -b & 0 & 2b \\ -1 & 2b & -4 \end{vmatrix}=-4b^2+12b^2-8b^2=0 \quad\rightarrow\quad no\,\exists\,(AB)^{-1}$$

Calculemos BA,

$$BA=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & b & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ b & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ b^2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\exists\,(BA)^{-1} \quad si \quad |BA|\neq 0$$

$$|BA|=\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ b^2 & -4 \end{vmatrix}=12-2b^2$$

$$12-2b^2=0; \quad 12=2b^2; \quad b^2=6; \quad b=\pm\sqrt{6} \quad\rightarrow\quad \exists\,(BA)^{-1} \quad si \;\; b\neq\pm\sqrt{6}$$

Finalmente, ***independientemente del valor de b la matriz AB no tiene inversa y la matriz BA tiene inversa cuando*** $b\neq\pm\sqrt{6}$.

b) ¿b? / $\exists(A^T A)^{-1}$

Calculemos $A^T A$,

$$A^T A=\begin{pmatrix} 1 & b & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ b & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b^2+2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\exists\,(A^T A)^{-1} \quad si \quad |A^T A|\neq 0. \qquad |A^T A|=\begin{vmatrix} b^2+2 & 0 \\ 0 & 8 \end{vmatrix}=8(b^2+2)$$

$$8(b^2+2)=0; \quad b^2+2=0; \quad b^2=-2; \quad b=\pm\sqrt{-2}\;\; no\,\exists$$

Por lo que, ***la inversa de $A^T A$ existe para cualquier valor real del parámetro b.***

c) Cálculo de $(A^T A)^{-1}$.

Sabemos de b) que $\left|A^T A\right| = 8\left(b^2+2\right)$

$$A^T A = \begin{pmatrix} b^2+2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{menores} \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & b^2+2 \end{pmatrix} \xrightarrow{adjuntos} \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & b^2+2 \end{pmatrix} \xrightarrow{traspuesta} \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & b^2+2 \end{pmatrix}$$

$$Y\ \left(A^T A\right)^{-1} = \frac{1}{8\left(b^2+2\right)} \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & b^2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{8}{8\left(b^2+2\right)} & \dfrac{0}{8\left(b^2+2\right)} \\ \dfrac{0}{8\left(b^2+2\right)} & \dfrac{b^2+2}{8\left(b^2+2\right)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{b^2+2} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{8} \end{pmatrix}$$

Por tanto, $\forall\, b \in \Re,\ \left(A^T A\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{b^2+2} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{8} \end{pmatrix}$