PROBLEMA 5. Se da el plano π: $2x + y - z - 5 = 0$ y los puntos A(1, 2, – 1), B(2, 1, 0).
Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) La ecuación implícita del plano que pasa por los puntos A, B y es perpendicular a π. *(4 puntos)*
b) Las ecuaciones paramétricas de la recta r que es perpendicular a π y pasa por A. Encuentra dos planos cuya intersección sea la recta r. *(1+2 puntos)*
c) La distancia entre el punto B y la recta r. *(3 puntos)*

Solución:

a) ¿Plano σ? / A y B $\in \sigma$ y $\sigma \perp \pi$.

$$\sigma \perp \pi \rightarrow \vec{n}_\pi \text{ es vector director de } \sigma, \quad \vec{n}_\pi(2,1,-1)$$

$$A \ y \ B \in \sigma \rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} \text{ es vector director de } \sigma, \quad \overrightarrow{AB}\,(1,-1,1) \\ \text{Tomamos } B \text{ como punto de } \sigma \end{cases}$$

La ecuación del plano σ,

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow (x-2)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - (y-1)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-2)\cdot 0 - (y-1)\cdot 3 + z\cdot(-3) = 0 \rightarrow -3y + 3 - 3z = 0 \rightarrow y + z - 1 = 0$$

Por lo tanto, ***la ecuación del plano σ es: $y + z - 1 = 0$.***

b) ¿Recta r? / A $\in$ r y r $\perp \pi$.

$$\text{De la recta } r \text{ conocemos: } \begin{cases} \text{punto} \quad A(1,2,-1) \\ \text{v. director, } r \perp \pi \rightarrow \vec{v}_r = \vec{n}_\pi(2,1,-1) \end{cases}$$

Las ecuaciones paramétricas de r,
$$r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \qquad \lambda \in \Re \\ z = -1 - \lambda \end{cases}$$

Encontremos dos planos cuya intersección sea la recta r.
Escribimos la ecuación continua de r,

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{-1} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{1} \\ \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{z+1}{-1} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - 1 = 2y - 4 \\ -x + 1 = 2z + 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - 2y + 3 = 0 \\ -x - 2z - 1 = 0 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} x - 2y + 3 = 0 \\ x + 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

Dos planos cuya intersección es la recta r son: τ: $x - 2y + 3 = 0$ y ω: $x + 2z + 1 = 0$.

c) ¿d(B,r)?

Como $A \in r \;\rightarrow\; d(B,r) = \dfrac{\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{v_r}\right|}{\left|\overrightarrow{v_r}\right|}$

Del apartado a): $\overrightarrow{AB}\,(1,-1,1)$; *del apartado b):* $\overrightarrow{v_r} = (2,1,-1)$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{v_r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}\cdot 0 - \vec{j}\cdot(-3) + \vec{k}\cdot 3 = (0,3,3)$$

$$\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{v_r}\right| = \sqrt{0^2 + 3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$$

$$\left|\overrightarrow{v_r}\right| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$$

Luego $d(B,r) = \dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \sqrt{3}$ *u.l.*