PROBLEMA 6. En un triángulo isósceles, los dos lados iguales miden 10 centímetros cada uno.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

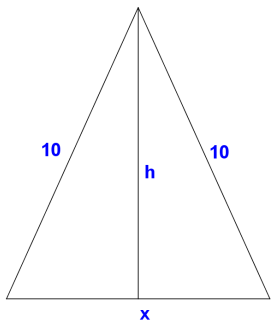
a) La expresión del área *A(x)* del triángulo, en función de la longitud *x* del tercer lado. *(4 puntos)*

b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función *A(x), 0 ≤ x ≤ 20.* *(4 puntos)*

c) La longitud *x* del tercer lado para que el área del triángulo sea máxima y el valor de este área. *(2 puntos)*

Solución:

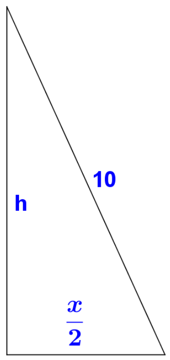
a) El triángulo isósceles del problema es:



El área de este triángulo será: $A=\dfrac{x\cdot h}{2}$

Obtenemos el valor de h en función de x, teniendo en cuenta que en un triángulo isósceles la altura sobre el lado desigual divide a este en dos partes iguales y forma con la base un ángulo recto.

Es decir:



Aplicando el teorema de Pitágoras,

$$10^2=h^2+\left(\frac{x}{2}\right)^2;\quad 100=h^2+\frac{x^2}{4};\quad h^2=100-\frac{x^2}{4}=\frac{400-x^2}{4};$$

$$h=\sqrt{\frac{400-x^2}{4}}=\frac{\sqrt{400-x^2}}{2}$$

$$A=\frac{x\cdot\dfrac{\sqrt{400-x^2}}{2}}{2}=\frac{x\sqrt{400-x^2}}{4}$$

Por construcción el valor de x puede variar entre 0 y 20 (para x = 0 o x = 20 no habría triángulo)

Por tanto, $A(x)=\dfrac{x\sqrt{400-x^2}}{4}\qquad x\in(0,20)$

b) Monotonía de A(x).

$$A(x)=\frac{x\sqrt{400-x^2}}{4}=\frac{1}{4}\left(x\sqrt{400-x^2}\right)$$

$$A'(x)=\frac{1}{4}\left[\sqrt{400-x^2}+x\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{400-x^2}}\right]=\frac{1}{4}\left[\sqrt{400-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{400-x^2}}\right]=\frac{1}{4}\,\frac{400-x^2-x^2}{\sqrt{400-x^2}}=$$

$$=\frac{400-2x^2}{4\sqrt{400-x^2}}=\frac{200-x^2}{2\sqrt{400-x^2}}$$

$$A'(x)=0\quad\rightarrow\quad\frac{200-x^2}{2\sqrt{400-x^2}}=0;\quad 200-x^2=0;\quad x^2=200;\quad x=\pm\sqrt{200}=\pm10\sqrt{2}\cong\pm14'14$$

Como el dominio de A(x) es el intervalo (0,20), estudiaremos el signo de A´(x) en los intervalos:

x	$A'(x)$
10	$\dfrac{200-10^2}{2\sqrt{400-10^2}} = 2'886\ldots \quad +$
15	$\dfrac{200-15^2}{2\sqrt{400-15^2}} = -0'944\ldots \quad -$

Finalmente, ***A(x) es creciente en*** ***(*** 0 ***,*** $10\sqrt{2}$ ***)*** ***y decreciente en*** ***(*** $10\sqrt{2}$ ***, 20).***

c) ¿Longitud del lado x para que el área sea máxima?

Del estudio de la monotonía de $A(x)$ *deducimos que para* $x = 10\sqrt{2}$ *hay un máximo relativo. Y este máximo relativo es el absoluto porque la función a su izquierda es creciente y a su derecha decreciente.*

$$\text{Para} \quad x = 10\sqrt{2}, \quad A(x) = \frac{10\sqrt{2}\,\sqrt{400-\left(10\sqrt{2}\right)^2}}{4} = 50$$

Finalmente, ***el área del triángulo es máxima cuando el lado desigual del triángulo isósceles mide*** $10\sqrt{2}$ ***cm y el valor de esta área es de 50 cm²***.