PROBLEMA 1. Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x - y + z = m \\ x + y + 3z = 0 \\ 5x - 4y + mz = m \end{cases}$, donde m es un parámetro real. Se pide:

a) La discusión del sistema de ecuaciones en función del parámetro m. *(4 puntos)*
b) La solución del sistema cuando $m = 1$. *(3 puntos)*
c) Las soluciones del sistema en el caso en que sea compatible indeterminado. *(3 puntos)*

Solución:
a)

La matriz ampliada de este sistema es: $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & m \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 5 & -4 & m & m \end{array}\right)$

A es una matriz 3x3, por tanto el máximo rango de A es 3.
A´ es una matriz 3x4, por tanto el máximo rango de A es 3.
Empezamos estudiando el rango de A

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 5 & -4 & m \end{vmatrix} = 2m - 4 - 15 - 5 + 24 + m = 3m$$

$$3m = 0; \quad m = 0$$

Para $m \neq 0$

$|A| \neq 0$ $\rightarrow$ ran(A) = 3, y como el máximo rango de A´ es 3 $\rightarrow$ ran(A) = ran(A´) = 3 = nº incógnitas, por lo que el sistema es compatible y determinado.

Para $m = 0$

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 5 & -4 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Sería un sistema homogéneo luego compatible {ran(A) = ran(A´)}.

Sabemos que $|A| = 0$, estudiemos el rango de A,

$$\text{En A,} \quad \left.\begin{array}{l} |2| = 2 \neq 0 \\ \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 1 = 3 \neq 0 \end{array}\right\} \rightarrow ran(A) = 2$$

Por lo tanto, ran(A) = 2 = ran(A´) < nº de incógnitas, luego el sistema es compatible indeterminado.

Por tanto, ***el sistema es compatible determinado para $m \neq 0$ y compatible indeterminado para m = 0.***

b) Si m = 1 ($m \neq 0$), el sistema es compatible determinado.

La matriz ampliada de este nuevo sistema sería: $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 5 & -4 & 1 & 1 \end{array}\right)$

$|A| = (3m)|_{m=1} = 3 \cdot 1 = 3$

Resolviendo por Cramer,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{1-3-1+12}{3} = 3; \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{1+15-6-1}{3} = 3; \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 5 & -4 & 1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{2-4-5+1}{3} = -2$$

Si m = 1, la solución es: $\begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \\ z = -2 \end{cases}$

c) Soluciones cuando el sistema es compatible indeterminado.

El sistema es compatible indeterminado para m = 0.

El sistema a sistema a resolver es el correspondiente a las ecuaciones e incógnitas del menor de orden 2 no nulo calculado en el apartado a). Es decir, el formado por la 1ª y 2ª ecuaciones y como incógnitas principales x e y.

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + y + 3z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x - y = -z \\ x + y = -3z \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} x = \dfrac{\begin{vmatrix} -z & -1 \\ -3z & 1 \end{vmatrix}}{3} = \dfrac{-z-3z}{3} = \dfrac{-4z}{3} \\ y = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & -z \\ 1 & -3z \end{vmatrix}}{3} = \dfrac{-6z+z}{3} = \dfrac{-5z}{3} \end{array}$$

Cuando el sistema es compatible indeterminado su solución es: $\begin{cases} x = \dfrac{-4\lambda}{3} \\ y = \dfrac{-5\lambda}{3} \\ z = \lambda \end{cases} \qquad \lambda \in \Re$