PROBLEMA 2. Se dan las rectas $r:\begin{cases} x+y-1=0 \\ 2x-z-1=0 \end{cases}$, $s:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z}{2}$ y el plano π: $x + m\,y + z = 2$ que depende del parámetro real m. Se pide:

a) La posición relativa de las rectas r y s. *(4 puntos)*
b) El valor del parámetro m para que la recta r esté contenida en el plano π. *(3 puntos)*
c) Los puntos A, B, C intersección del plano π con los ejes de coordenadas cuando $m = 2$, así como el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y $P(2, 2, 2)$. *(3 puntos)*

Solución:

a) ¿Posición relativa de r y s?

Nos interesa obtener un punto y un vector director de cada una de las rectas.

$r:\begin{cases} x+y-1=0 \\ 2x-z-1=0 \end{cases} \rightarrow r:\begin{cases} x+y=1 \\ 2x-z=1 \end{cases}$ *como* {*menor de y z*} $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}=-1\neq 0$, *despejamos z e y en función de x.*

$\begin{cases} y=1-x \\ -z=1-2x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=1-x \\ z=-1+2x \end{cases} \rightarrow r:\begin{cases} x=\lambda \\ y=1-\lambda \\ z=-1+2\lambda \end{cases} \quad \lambda\in\Re$ *Por tanto:* $r:\begin{cases} P_r(0,1,-1) \\ \vec{v}_r(1,-1,2) \end{cases}$

$s:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z}{2} \rightarrow s:\begin{cases} P_s(1,0,0) \\ \vec{v}_s(1,-1,2) \end{cases}$

Como ambos vectores directores son iguales, las rectas son paralelas. Falta determinar si son o no coincidentes.

Estudiamos la matriz $\left[\vec{v}_r \quad \vec{v}_s \;\vdots\; \overrightarrow{P_rP_s}\right]$, *es decir:* $M'=\left(\begin{array}{cc:c} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{array}\right)$

Como las rectas son paralelas, ran(M) = 1

Rango de M´, {M´ es 3 x 3, luego máximo rango de M es 3}.

Como las dos primeras columnas son iguales sabemos que ran (M´) es, como máximo, 2

El menor: $\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-1+2=1\neq 0 \rightarrow ran(M')=2$

Como ran (M) ≠ ran(M´) = 2, ***las rectas r y s son paralelas no coincidentes.***

b) ¿m / recta r ⊂ plano π?

Si r ⊂ π, al sustituir los valores de x, y, z de la recta en la ecuación del plano, esta debe cumplirse para cualquier valor de λ.

$\lambda + m(1-\lambda) + (-1+2\lambda) = 2$ *(en esta ecuación la incógnita es λ)*

$\lambda + m - m\lambda - 1 + 2\lambda = 2$

$\lambda - m\lambda + 2\lambda = 2 + 1 - m$

$3\lambda - m\lambda = 3 - m$

$(3-m)\lambda = 3 - m$

Esta ecuación se cumplirá para cualquier valor de λ cuando 3 – m = 0, es decir m = 3

Otra forma de resolverlo es:

Si r ⊂ π, el vector director de la recta y el normal del plano serán perpendiculares.

$\vec{v}_r(1,-1,2)$ y $\vec{n}_\pi(1,m,1)$. $\vec{v}_r \perp \vec{n}_\pi \rightarrow \vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi = 0$

$(1,-1,2)\cdot(1,m,1) = 1-m+2 = 3-m$

$3 - m = 0; \quad m = 3.$

Y ahora comprobemos que para este valor de m la recta está contenida en el plano.

¿ $\lambda + 3(1-\lambda) + (-1+2\lambda) = 2$?; $\lambda + 3 - 3\lambda - 1 + 2\lambda = 2$; $2 = 2$ *Sí*

En conclusión, ***para que la recta r esté contenida en el plano π debe ser m = 3.***

c) Para m = 2, el plano $\pi: x + 2y + z = 2$

Corte del plano con los ejes coordenados:

$\boldsymbol{A}$ = Eje $OX \cap \pi$

Ecuación del eje OX: $\left\langle \begin{array}{l} \text{punto } (0,0,0) \\ \vec{v}\ (1,0,0) \end{array} \right. \rightarrow OX: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \quad \lambda \in \Re \\ z = 0 \end{cases}$

Sustituyendo los valores de x, y, z en la ecuación de π,

$\lambda + 2 \cdot 0 + 0 = 2; \quad \lambda = 2 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{A(2,0,0)}$

$\boldsymbol{B}$ = Eje $OY \cap \pi$

Ecuación del eje OY: $\left\langle \begin{array}{l} \text{punto } (0,0,0) \\ \vec{v}\ (0,1,0) \end{array} \right. \rightarrow OX: \begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda \quad \lambda \in \Re \\ z = 0 \end{cases}$

Sustituyendo los valores de x, y, z en la ecuación de π,

$0 + 2 \cdot \lambda + 0 = 2; \quad 2\lambda = 2; \quad \lambda = 1 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{B(0,1,0)}$

$\boldsymbol{C}$ = Eje $OZ \cap \pi$

Ecuación del eje OZ: $\left\langle \begin{array}{l} \text{punto } (0,0,0) \\ \vec{v}\ (0,0,1) \end{array} \right. \rightarrow OX: \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \quad \lambda \in \Re \\ z = \lambda \end{cases}$

Sustituyendo los valores de x, y, z en la ecuación de π,

$0 + 2 \cdot 0 + \lambda = 2; \quad \lambda = 2 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{C(0,0,2)}$

Volumen del tetraedro de vértices A, B, C y P (2, 2, 2)

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AP}(0,2,2) \\ \overrightarrow{BP}(2,1,2) \\ \overrightarrow{CP}(2,2,0) \end{array}\right\} \rightarrow V = \frac{1}{6}\left\| \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} \right\| = \frac{1}{6}|8+8-4| = 2\,u^3$$

Solución: ***A (2 , 0 , 0), B (0 , 1 , 0), C (0 , 0 , 2) y el volumen del tetraedro de vértices A, B, C, y P es 2 u³.***