**Problema 4.** Se dan las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & a & 1 \\ 1 & a^2-2 & 3 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Obtened:

a) El rango de la matriz A según los valores del parámetro $a$. *(3 puntos)*

b) Una matriz $C$ tal que $A\ C$ = 16 $I$, siendo $I$ la matriz identidad, cuando a = 0. *(4 puntos)*

c) El rango de la matriz $B$ y la discusión de si el sistema $B\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ tiene solución.

*(3 puntos)*

*Solución:*

*a) ¿ran(A) en función de a?*

*Estudiemos /A/,*

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & a & 1 \\ 1 & a^2-2 & 3 \end{vmatrix}=C_3-3xC_1=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & a & 4 \\ 1 & a^2-2 & 0 \end{vmatrix}=\text{desarrollando por la } 3^a \text{ columna} =$$

$$=-4\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & a^2-2 \end{vmatrix}=-4\left(a^2-2-2\right)=-4\left(a^2-4\right)$$

$$-4\left(a^2-4\right)=0; \quad a^2-4=0; \quad a^2=4; \quad a=\pm\sqrt{4}=\pm 2$$

*Por tanto,*

*Si $a \neq -2$ y 2 $\rightarrow$ $/A/\neq 0$ $\rightarrow$ ran(A) = 3*

*Si a = – 2,*

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{sabemos que } |A|=0$$

$$\text{como } \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=2+6=8\neq 0 \quad \rightarrow \quad ran(A)=2$$

*Si a = 2,*

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{sabemos que } |A|=0$$

$$\text{como } \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=2-6=-4\neq 0 \quad \rightarrow \quad ran(A)=2$$

*Finalmente,*

***Si $a \neq -2$ y 2, ran(A) = 3***

***Si a = – 2 o a = 2, ran(A) = 2***

*b) ¿C? / A C = 16 I para a = 0.*

*Como a = 0 ($a \neq -2$ y 2 ), ran(A) = 3 y existe $A^{-1}$.*

*Sabemos que* $|A|=-4\left(a^2-4\right) \rightarrow |A|_{a=0}=\left[-4\left(a^2-4\right)\right]_{a=0}=-4\left(0^2-4\right)=16$

*Calculemos $A^{-1}$,*

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & -2 & 3\end{pmatrix} \xrightarrow{menores} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1\\ -2 & 3\end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 0\\ 1 & -2\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix} 2 & 3\\ 1 & 2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3\\ 2 & 2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2\\ 1 & -2\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix} 2 & 3\\ 0 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3\\ -1 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2\\ -1 & 0\end{vmatrix}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2\\ -12 & 0 & 4\\ 2 & -4 & 2\end{pmatrix} \xrightarrow{adjuntos} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2\\ 12 & 0 & -4\\ 2 & 4 & 2\end{pmatrix} \xrightarrow{traspuesta} \begin{pmatrix} 2 & -12 & 2\\ 4 & 0 & -4\\ 2 & 4 & 2\end{pmatrix}$$

*Finalmente,* $A^{-1}=\dfrac{1}{16}\begin{pmatrix} 2 & -12 & 2\\ 4 & 0 & -4\\ 2 & 4 & 2\end{pmatrix}$

*Obtengamos la matriz C.*
*$A\,C = 16\,I$, multiplicando por la izquierda por $A^{-1}$,*
*$A^{-1}\,A\,C = A^{-1}\,16\,I$; $\quad I\,C = 16\,A^{-1}\,I$; $\quad C = 16\,A^{-1}$*

*Luego* $C=16\dfrac{1}{16}\begin{pmatrix} 2 & -12 & 2\\ 4 & 0 & -4\\ 2 & 4 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -12 & 2\\ 4 & 0 & -4\\ 2 & 4 & 2\end{pmatrix}$. ***Solución:*** $C=\begin{pmatrix} 2 & -12 & 2\\ 4 & 0 & -4\\ 2 & 4 & 2\end{pmatrix}$

*c) Rango de B*

$$B=\begin{pmatrix} 1\\ -1\\ 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3\\ -1 & -2 & -3\\ 2 & 4 & 6\end{pmatrix}$$

*En esta matriz $F_2 = -F_1$ y $F_3 = 2\,.\,F_1$, tiene una sola fila linealmente independiente, luego **ran(B) = 1**.*

*¿El sistema* $B\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\\ -1\\ 2\end{pmatrix}$ *tiene solución?*

*La matriz ampliada de este sistema es:* $M'=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1\\ -1 & -2 & -3 & -1\\ 2 & 4 & 6 & 2\end{array}\right)$

*En esta matriz también se cumple que $F_2 = -F_1$ y $F_3 = 2\,.\,F_1$, tiene una sola fila linealmente independiente, luego ran(M) = ran(M´) = 1 < nº de incógnitas. Por tanto el sistema es compatible indeterminado.*
*Luego, **el sistema planteado tiene solución**.*

*Aunque no se pide, la solución del sistema sería:*

*De la primera ecuación despejamos x:* $x = 1 - 2y - 3z \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = 1-2\lambda-3\mu\\ y=\lambda\\ z=\mu\end{cases} \qquad \lambda, \mu \in \Re$