PROBLEMA 5. Dados los puntos $P(1, 1, 0)$, $Q(2, -1, 1)$ y $R(\alpha, 3, -1)$ se pide:

a) La ecuación del plano que contiene a *P, Q y R* cuando $\alpha = 1$ y la distancia de dicho plano al origen de coordenadas. *(3 puntos)*

b) La ecuación de la recta *r* que pasa por *R* cuando $\alpha = 1$ y es paralela a la recta *s* que pasa por *P* y *Q*. *(4 puntos)*

c) Los valores de α para los cuales *P, Q y R* están alineados y la ecuación de la recta que los contiene. *(3 puntos)*

Solución:

a) ¿plano π que contiene los puntos P, Q y R para $\alpha = 1$?

P(1, 1, 0), Q(2, – 1, 1) y R(1, 3, – 1)

$$\text{Del plano } \pi \text{ conocemos } \begin{cases} \text{punto} \quad P(1,1,0) \\ \text{vectores directores} \begin{cases} \overrightarrow{PQ}(1,-2,1) \\ \overrightarrow{PR}(0,2,-1) \end{cases} \end{cases}$$

La ecuación del plano π será:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{matrix} \\ \\ F_3+F_2 \end{matrix} \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \;\rightarrow\; y-1+2z=0 \;\rightarrow\; y+2z-1=0$$

Por tanto, la ecuación del plano $\boldsymbol{\pi: \; y + 2z - 1 = 0}$

¿Distancia del plano π al origen de coordenadas O(0,0,0)?

$$d(O,\pi) = \frac{|0+2\,.\,0-1|}{\sqrt{0^2+1^2+2^2}} = \frac{|-1|}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}\; u.l. \cong 0{'}4472\; u.l.$$

b) ¿recta r / $R \subset r$ y $r \,//\, s$ {P y $Q \in s$}?

$$\vec{v}_s = \overrightarrow{PQ}(1,-2,1) \;\rightarrow\; \text{como } \; r\,//\,s \;\rightarrow\; \vec{v}_r = \vec{v}_s \;\rightarrow\; \vec{v}_r(1,-2,1)$$

$$\text{De la recta } r: \begin{cases} \text{Punto } R(1,3,.1) \\ \vec{v}_r(1,-2,1) \end{cases}$$

Por tanto, **r:** $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-3}{-2} = \dfrac{z-1}{1}$.

¿d(r,s)?

$$\text{Como } r\,//\,s \;\rightarrow\; d(r,s) = d(P_r,s) = \frac{\left|\overrightarrow{P_rP_s} \times \vec{v}_s\right|}{\left|\vec{v}_s\right|}$$

$$\left.\begin{matrix} P_r = R(1,3,-1 \\ P_s = (1,1,0) \end{matrix}\right\} \; \overrightarrow{P_rP_s} = (0,-2,1)$$

$$\vec{v}_s = (1,-2,1) \;\rightarrow\; \left|\vec{v}_s\right| = \sqrt{1^2+(-2)^2+1^2} = \sqrt{6}$$

$$\overrightarrow{P_rP_s} \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = \vec{j} + 2\vec{k} = (0,1,2)$$

$\left|\overrightarrow{P_rP_s} \times \overrightarrow{v_s}\right| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

Finalmente, **d(r,s) =** $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} \cong 0'9129$ *u.l.*

c) ¿ α / P, Q y R estén alineados?

P, Q y R están alineados cuando $\overrightarrow{PQ} // \overrightarrow{PR}$

P(1, 1, 0), Q(2, – 1, 1) y R(α, 3, – 1)

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{PQ}(1,-2,1) \\ \overrightarrow{PR}(\alpha-1,2,-1) \end{array}\right\} \quad \overrightarrow{PQ} // \overrightarrow{PR} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\alpha-1} = \frac{-2}{2} = \frac{1}{-1} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\alpha-1} = -1; \quad 1 = -\alpha + 1; \quad \alpha = 0$$

Para este valor de α, la ecuación de la recta que contiene a P, Q y R es:
{escogiendo como punto P y como vector director $\overrightarrow{PQ}$ *}*

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{1}.$$

Solución: P, Q y R estén alineados cuando $\alpha = 0$ y

la ecuación de la recta que los contiene es $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z}{1}$**.**