Problema 1. Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} a\,x + y = 1 \\ x + z = 1 \\ x + a\,y + (a-1)\,z = a \end{cases}$.

a) Discutir el sistema en función del parámetro real a. *(5 puntos)*
b) Encontrar todas las soluciones del sistema cuando este sea compatible. *(5 puntos)*

Solución:
a)

La matriz ampliada de este sistema es: $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & a & a-1 & a \end{array}\right)$

A es una matriz 3x3, por tanto el máximo rango de A es 3.
A´ es una matriz 3x4, por tanto el máximo rango de A es 3.
Empezamos estudiando el rango de A

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & a & a-1 \end{vmatrix} = 1 - a^2 - a + 1 = -a^2 - a + 2$$

$$-a^2 - a + 2 = 0; \quad a = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4\cdot(-1)\cdot 2}}{2\cdot(-1)} = \frac{1 \pm 3}{-2} = \begin{cases} \dfrac{1+3}{-2} = -2 \\ \dfrac{1-3}{-2} = 1 \end{cases}$$

Si $a \neq -2$ *y* 1

/A /≠0 → ran(A) = 3, y como el máximo rango de A´ es 3 → ran(A) = ran(A´) = 3 = nº incógnitas, por lo que el sistema es compatible y determinado.

Si $a = -2$

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \end{array}\right)$$

Sabemos que /A / = 0, estudiemos el rango de A,

$$\text{En A,} \quad \left.\begin{array}{l} |1| = 1 \neq 0 \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \end{array}\right\} \to ran(A) = 2$$

$$\text{En A´,} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & -2 \end{vmatrix} = -2 + 2 + 3 = 3 \neq 0 \quad \to \quad ran(A´) = 3$$

Por lo tanto, ran(A) = 2 ≠3 = ran(A´), luego el sistema es incompatible.

Si $a = 1$

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Sabemos que /A / = 0, estudiemos el rango de A,

$$\text{En } A, \quad \left.\begin{array}{l} |1| = 1 \neq 0 \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \end{array}\right\} \rightarrow ran(A) = 2$$

$$\text{En } A', \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \{F_1 = F_3\} = 0 \quad \rightarrow \quad ran(A') = 2$$

Por lo tanto, ran(A) = 2 = ran(A´), luego el sistema es compatible indeterminado.

Por tanto, ***si a ≠ – 2 y 1, el sistema es compatible determinado;***
si a = – 2, el sistema es incompatible;
si a = 1, el sistema es compatible indeterminado.

b) El sistema es compatible en dos casos. Obtengamos la solución en cada caso.
Si a ≠ – 2 y 1, S. C. D.

La matriz ampliada de este sistema es: $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & a & a-1 & a \end{array}\right)$

$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & a & a-1 \end{vmatrix} = -a^2 - a + 2$ *(calculado anteriormente y como las raíces de este polinomio son 1 y – 2)*
$= -(a-1)(a+2)$

Resolviendo por Cramer,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ a & a & a-1 \end{vmatrix}}{-a^2 - a + 2} = \frac{a - a - a + 1}{-a^2 - a + 2} = \frac{-a+1}{-a^2 - a + 2} = \frac{-(a-1)}{-(a-1)(a+2)} = \frac{1}{a+2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a-1 \end{vmatrix}}{-a^2 - a + 2} = \frac{a^2 - a + 1 - a^2 - a + 1}{-a^2 - a + 2} = \frac{-2a+2}{-a^2 - a + 2} = \frac{-2(a-1)}{-(a-1)(a+2)} = \frac{2}{a+2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & a & a \end{vmatrix}}{-a^2 - a + 2} = \frac{a + 1 - a^2 - a}{-a^2 - a + 2} = \frac{1 - a^2}{-a^2 - a + 2} = \frac{(1-a)(1+a)}{-(a-1)(a+2)} = \frac{(1-a)(1+a)}{(1-a)(a+2)} = \frac{a+1}{a+2}$$

Si a ≠ – 2 y 1, la solución es: $\begin{cases} x = \dfrac{1}{a+2} \\ y = \dfrac{2}{a+2} \\ z = \dfrac{a+1}{a+2} \end{cases}$

Si a = 1, S. C. I.

El sistema a sistema a resolver es el correspondiente a las ecuaciones e incógnitas del menor de orden 2 no nulo calculado en el apartado a). Es decir, el formado por la 1ª y 2ª ecuaciones y como incógnitas principales y z.

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x+z=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=1-x \\ z=1-x \end{cases} \rightarrow \quad \textit{Solución} \quad \begin{cases} x=\lambda \\ y=1-\lambda \\ z=1-\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \Re$$

Si a = 1 la solución es: $\begin{cases} x=\lambda \\ y=1-\lambda \\ z=1-\lambda \end{cases} \qquad \lambda \in \Re$