Problema 2. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} a+b & 1 \\ 0 & a-b \end{pmatrix}$:

a) Calcular los valores de los parámetros a y b para que se cumpla. $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
(4 puntos)

b) Para los valores a y b obtenidos en el apartado anterior, calcular A^3 y A^4. *(3 puntos)*

c) Calcular $det\,(A^{-50})$ cuando $a^2-b^2\neq 0$ *(3 puntos)*

Solución:

a) Para que exista A^{-1}, $/A/\neq 0$

$$|A|=\begin{vmatrix} a+b & 1 \\ 0 & a-b \end{vmatrix}=a^2-b^2\neq 0 \quad\rightarrow\quad \exists\, A^{-1} \text{ cuando } a^2\neq b^2$$

Calculemos A^{-1},

$$A=\begin{pmatrix} a+b & 1 \\ 0 & a-b \end{pmatrix}\overset{menores}{\rightarrow}\begin{pmatrix} a-b & 0 \\ 1 & a+b \end{pmatrix}\overset{adjuntos}{\rightarrow}\begin{pmatrix} a-b & 0 \\ -1 & a+b \end{pmatrix}\overset{traspuesta}{\rightarrow}\begin{pmatrix} a-b & -1 \\ 0 & a+b \end{pmatrix}$$

$$Y,\ A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} a-b & -1 \\ 0 & a+b \end{pmatrix}=\frac{1}{a^2-b^2}\begin{pmatrix} a-b & -1 \\ 0 & a+b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{a-b}{a^2-b^2} & \dfrac{-1}{a^2-b^2} \\ 0 & \dfrac{a+b}{a^2-b^2} \end{pmatrix},$$

$$como\ \ a^2-b^2=(a+b)(a-b),:\ A^{-1}=\begin{pmatrix} \dfrac{a-b}{a^2-b^2} & \dfrac{-1}{a^2-b^2} \\ 0 & \dfrac{a+b}{a^2-b^2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{a-b}{(a+b)(a-b)} & \dfrac{-1}{a^2-b^2} \\ 0 & \dfrac{a+b}{(a+b)(a-b)} \end{pmatrix}=$$

$$simplificando;\ A^{-1}=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{(a+b)} & \dfrac{-1}{a^2-b^2} \\ 0 & \dfrac{1}{(a-b)} \end{pmatrix}$$

$$Debe\ cumplirse\ que\ \begin{pmatrix} \dfrac{1}{(a+b)} & \dfrac{-1}{a^2-b^2} \\ 0 & \dfrac{1}{(a-b)} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\ \rightarrow\ \begin{cases} \dfrac{1}{(a+b)}=1 \\ \dfrac{-1}{a^2-b^2}=-1 \\ \dfrac{1}{(a-b)}=1 \end{cases}\ \rightarrow\ \begin{cases} a+b=1 \\ a^2-b^2=1 \\ a-b=1 \end{cases}$$

Resolvamos el sistema formado por la primera y tercera ecuaciones, después comprobaremos que la solución cumple la segunda ecuación.

$\begin{cases} a+b=1 \\ a-b=1 \end{cases}$ *sumando ambas ecuaciones,* $2a=2$, $a=1$. *Sustituyendo en la 1ª,* $1+b=1$, $b=0$

Como $1^2-0^2=1$, *cumple la segunda ecuación. Y además* $1^2-0^2\neq 0$

La solución del sistema es $a=1$ *y* $b=0$.

Solución: los valores de los parámetros pedidos son $a=1$ y $b=0$.

b) Para a = 1 y b = 0, calcular A^3 *y* A^4.

Para a = 1 y b = 0, $A=\begin{pmatrix} a+b & 1 \\ 0 & a-b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^2 = A\cdot A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2\cdot A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3\cdot A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución: $A^3=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *y* $A^4=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) Calcular det (A^{-50}) *cuando* $a^2 - b^2 \neq 0$

Como $a^2 - b^2 \neq 0$*, según obtuvimos en el apartado a),* $\exists A^{-1}$

Considerando las propiedades de los determinantes: det (A . B) = det (A) . det (B) y $\det(A^{-1})=\dfrac{1}{\det(A)}$

$$A^{-50}=\left(A^{50}\right)^{-1} \quad\rightarrow\quad \det\left(A^{-50}\right)=\det\left(\left(A^{50}\right)^{-1}\right)=\frac{1}{\det\left(A^{50}\right)}=\frac{1}{[\det(A)]^{50}}=\frac{1}{\left(a^2-b^2\right)^{50}}$$

Solución: $\det\left(A^{-50}\right)=\dfrac{1}{\left(a^2-b^2\right)^{50}}$